

Uso de retroacciones didácticas en DGPad-Colombia para producir aprendizaje por adaptación relativo al sistema de representación numérico con valor posicional

Cristian Martínez & Sergio Rodríguez  
Abril 2023.

Director: Martín Eduardo Acosta Gempeler

Universidad Distrital Francisco José de Caldas  
Maestría en Educación  
Trabajo de grado



## Resumen

El siguiente trabajo tiene el propósito de mostrar los efectos que tiene sobre el aprendizaje la incorporación de una secuencia de actividades autónomas diseñadas en el software de geometría dinámica DGPad-colombia. Se pretende analizar cómo funciona el diseño para producir un aprendizaje por adaptación relativo al sistema de representación numérico con valor posicional. Realizamos un análisis preliminar sobre el sistema de numeración base diez, así como sus implicaciones didácticas en el aprendizaje, pedagógicas en su enseñanza y cognitivas relativas a los posibles obstáculos, errores y dificultades. A su vez, realizamos un apartado teórico sobre el aprendizaje por adaptación desde la perspectiva de la Teoría de las Situaciones Didácticas y el papel que cumple la herramienta digital, en la producción de conocimiento en la interacción sujeto-medio, la introducción al concepto de la automatización de la gestión didáctica desde las posibilidades que ofrece el software. Proponemos un análisis a-priori en el que hacemos una descripción del diseño, así como de las posibles acciones que los estudiantes pueden ejecutar en la interacción y, por lo tanto, sus respectivas retroacciones, posibles interpretaciones y validaciones. Presentamos la descripción del pilotaje realizado con dos parejas de estudiantes. Exponemos una síntesis de la interacción que tienen los estudiantes con cada tarea propuesta y un análisis sobre los aprendizajes por adaptación y la muestra de la automatización de la gestión didáctica en la secuencia. Por último, formulamos una serie de conclusiones y recomendaciones que buscan darle continuidad a la investigación en futuros trabajos e intervenciones haciendo uso de la tecnología digital.

**Palabras clave:** *Aprendizaje por adaptación, automatización, valor posicional, software de geometría dinámica, gestión didáctica.*

## Tabla de Contenidos

Capítulo 1 Introducción e información general .....	1
Introducción .....	1
Problemática .....	3
Capítulo 2 Pregunta de investigación y objetivos.....	7
Pregunta de investigación: .....	7
Capítulo 3 Referente teórico, didáctico y metodológico .....	8
Diseño de tareas .....	8
Marco teórico didáctico. ....	9
Marco teórico matemático .....	14
Capítulo 4 Metodología .....	31
Capítulo 5 Diseño y análisis a-priori .....	32
1. Tareas de introducción.....	4
1.1 Agrupación.....	4
1.2. Desagrupación.....	14
2. Tareas de exploración-anticipación .....	22
2.1. Agrupación.....	23
2.2. Desagrupación.....	25
Capítulo 6 Análisis a-posteriori del pilotaje .....	34
1. Análisis tareas de introducción base 4 .....	35
1.3. Análisis tareas de introducción (desagrupación nivel 1-base 4).....	45
2. Análisis tareas de exploración- anticipación.....	55
2.3. Desagrupación nivel 1 (base 4) Análisis tareas de exploración- anticipación.....	84
3. Análisis tareas de exploración- anticipación (agrupación-base 10).....	106
3.3. Desagrupación nivel 1: Análisis tareas de exploración- anticipación (base 10).....	126
Capítulo 7 Conclusiones .....	151
Referencias.....	163

## **Capítulo 1**

### **Introducción e información general**

#### **Introducción**

El semillero de investigación Edutecma se ha interesado por el diseño de actividades y tareas en matemáticas utilizando tecnología informática. Las producciones se caracterizan por hacer un análisis profundo sobre la función que cumple el medio tecnológico en el aprendizaje de los estudiantes. Una de las propuestas está enfocada en el desarrollo de actividades en el software DGPad-Colombia que permiten al estudiante adquirir nuevos conocimientos sin la intervención directa del profesor.

Esta idea surge como respuesta a una necesidad asociada al proceso de acompañamiento del docente en el proceso de aprendizaje del estudiante. Según el MEN (2002) “el número promedio de alumnos por docente en la entidad territorial sea como mínimo 32 en la zona urbana” (p.2). De acuerdo con esta premisa, hacer efectivo el proceso de acompañamiento a cada estudiante es cada vez más difícil, dado que variables como el tiempo, el proceso de evaluación, la institucionalización y otras funciones que cumple el docente en el aula hacen compleja esta tarea.

Esta propuesta busca automatizar acciones asociadas a la gestión didáctica que realiza el profesor dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje, enmarcada en la adquisición de conocimientos relativos al sistema de representación numérica basado en el valor posicional. La postura conceptual que utilizamos para comprender la forma en la que se produce el aprendizaje es la Teoría de las Situaciones Didácticas propuesta por Brousseau (1986); a su vez utilizamos como eje metodológico la ingeniería didáctica

propuesta por Artigue (1995). Por último, nos basamos en algunas ideas propuestas por Duval (2001) y Kaput, (1987) para comprender los sistemas de representación, en particular el numérico. También se utilizan otras aproximaciones teóricas que permiten complementar el estudio preliminar teórico y cognitivo asociado al sistema de representación numérico con valor posicional.

Se crea un diseño que permite llevar a cabo tareas en diferentes bases de numeración, con el fin de que el estudiante pueda discriminar las invariantes conceptuales asociadas a la base, las normas de combinación, el cifrado, los valores absolutos y relativos de los numerales del sistema. El diseño posee dos tipos de sistemas de representación simbólicos para crear las tareas. Por una parte, el gráfico que utiliza metáforas asociadas al ábaco y el mini-computador de papy. Y, por otro lado, el sistema de representación numérico donde el estudiante tiene la posibilidad de introducir cantidades haciendo uso de la nomenclatura arábica como la conocemos hoy en día.

Presentamos el análisis a-priori que permite controlar teóricamente el conjunto de interacciones de los estudiantes con el software, y el análisis a posteriori de un pilotaje con cuatro estudiantes, en el que encontramos evidencias de los efectos del diseño en el aprendizaje de los estudiantes relativo al uso de un sistema de numeración con valor posicional. Por último, planteamos algunas conclusiones y recomendaciones que permiten enriquecer y fortalecer el proceso de refinamiento del diseño.

## Problemática

Las actividades cotidianas del ser humano le permiten entrar en contacto con el sistema de numeración base diez (SNBD) desde edades muy tempranas. Sin embargo, este primer acercamiento se lleva a cabo en el formato verbal-hablado del sistema que, según McCloskey, et al. (1990) citados por Muñoz et. al (2015) “está conformado por expresiones numéricas verbales, que se organizan en categorías léxicas y por un conjunto de reglas sintácticas, que permiten la conformación de los numerales por combinación de palabras que indican cantidad y palabras multiplicadoras que indican potencia” (p.394). El acceso a este primer formato del SNBD carece de contenido semántico sobre el valor posicional y las combinaciones de los dígitos en los números, lo cual aparece en el SNBD en el formato que describe como formato arábigo. Este formato hace referencia a la estructura basada en la materialización escrita de los diez dígitos del 0 al 9 y a la característica primordial de la asignación del “*valor posición*, que define las relaciones entre los componentes del numeral” (p.394).

La transición que realizan los estudiantes entre formatos de representación verbal-escrito trae consigo una serie de errores y obstáculos asociados a las interpretaciones y el sentido que le asignan al número, despreciando el carácter posicional en los dígitos. Orozco, Guerrero y Otálora (2007) hacen referencia a uno de los errores que cometen los estudiantes cuando realizan conversiones entre el registro oral y el escrito de representación de un número decimal. Por ejemplo, cuando se verbaliza el número “cuatrocientos cincuenta y dos” (formato verbal) el estudiante toma este elemento fonético como literal al momento de redactarlo en el registro escrito: “400502” (formato

arábigo carente de valor posición). Podemos identificar una problemática en la transición eficiente entre registros de representación, en la que el formato verbal predomina sobre la comprensión posicional del número a falta de un medio que permita establecer la relación coherente entre número y significado en términos de la posición de cada uno de los dígitos que lo componen.

Surge la preocupación de mejorar aspectos del aprendizaje del SNBD como un sistema de representación simbólico con valor posicional. Lo que implica realizar un estudio profundo sobre la adquisición de conocimientos relativos al valor posicional, como aquellos que propone Castro et, al (2015): comprensión de la estructura multiplicativa, los componentes de las unidades, la base y las normas de combinación que permitan identificar el valor relativo y absoluto de los dígitos. A su vez, es imprescindible pensar en un diseño de una secuencia de actividades en las que los estudiantes interactúen con un medio que favorezca el aprendizaje relativo al valor posicional.

Las herramientas digitales (como el software de geometría dinámica) tienen el potencial de convertirse en un medio para la interacción, que gracias a las acciones que posibilita y/o restringe y a las retroacciones que ofrece, favorece el aprendizaje por adaptación. Sin embargo, estas herramientas deben estudiarse rigurosamente para que puedan tener los efectos apropiados en el aprendizaje. Acosta (2017) afirma que los docentes tienen una tendencia a utilizar estas herramientas informáticas de una manera inadecuada, como un elemento motivador y llamativo para los estudiantes, dejando de lado la importancia epistemológica y didáctica que tienen las herramientas digitales, así como el impacto que tienen en la cognición de los estudiantes. Es necesario comprender la naturaleza de la

herramienta digital, identificar las características de este medio que son susceptibles de ser utilizadas en pro del aprendizaje, analizar los posibles efectos que tienen a nivel cognitivo, proponer actividades de clase y recolectar datos que permitan fundamentar coherentemente el por qué utilizamos herramientas digitales en la clase de matemáticas y cuáles son potenciales y sus límites

Por otro lado, es necesario también pensar la función del docente desde la incorporación de las herramientas digitales, puesto que podrían representar cambios importantes también en el quehacer pedagógico, por ejemplo, en la actividad asociada a la gestión didáctica. Según el MEN (2002) las funciones que cumple el docente están enmarcadas, entre otras, en: la evaluación, el diagnóstico, la planeación, la coordinación, la ejecución de tareas, así como otras actividades que responden al proyecto educativo institucional. Adicionalmente, de acuerdo con el decreto 3020 de 2002 se establece una orden que reglamenta la cantidad de estudiantes por docente en el aula regular: “Para la ubicación del personal docente se tendrá como referencia que el número promedio de alumnos por docente en la entidad territorial sea como mínimo 32 en la zona urbana” (p.2).

Naturalmente, las condiciones respecto a las funciones del docente, así como la cantidad de estudiantes que tiene en el aula, pueden obstaculizar el proceso de acompañamiento y vigilancia de los subprocesos que se manifiestan en el aprendizaje de cada estudiante en el aula. Aquí nuevamente, las herramientas digitales pueden acompañar y reforzar el proceso de validación de cada estudiante de manera autónoma, permitiendo al docente concentrarse en los procesos colectivos, como la institucionalización.

De acuerdo a las necesidades en el tratamiento de los conceptos relativos al sistema de representación numérico con valor posicional y la posibilidad de implementar un diseño de actividades que permitan aprovechar el potencial tecnológico para fortalecer el trabajo autónomo de los estudiantes, se propone la siguiente pregunta de investigación:

## Capítulo 2

### Pregunta de investigación y objetivos

#### Pregunta de investigación:

¿Qué características deben tener las actividades autónomas con el software DGPad-Colombia, para propiciar un aprendizaje por adaptación relativo al uso del sistema de representación numérica basada en el valor posicional en estudiantes de cuarto grado?

#### Objetivo general:

Establecer las características que debe tener una secuencia de actividades autónomas en el software DGPad-Colombia para producir aprendizaje por adaptación relativo al valor posicional.

#### Objetivos específicos:

- Identificar los factores que contribuyen al aprendizaje del sistema de representación numérica basada en el valor posicional a partir del trabajo en diferentes bases de numeración.
- Diseñar actos de devolución que contribuyan al desarrollo de procesos relacionados con el valor posicional a partir de diferentes bases de numeración.
- Proponer una secuencia de actividades autónomas en el software DGpad-Colombia y una manera de automatizar la gestión didáctica de dicha secuencia, que potencien el aprendizaje por adaptación del sistema de representación numérica basada en el valor posicional.

## **Capítulo 3**

### **Referente teórico, didáctico y metodológico**

#### **Diseño de tareas**

Existen algunos elementos que cobran importancia al momento de diseñar una situación, para que pueda producirse un aprendizaje por adaptación, de acuerdo con la TSD. Ruthven et al. (2009) proporcionan algunas pautas asociadas al diseño en este sentido: “el problema que se debe plantear, las condiciones bajo las cuales se debe resolver y la progresión esperada hacia una estrategia que sea válida y eficiente; esto incluye el proceso de ‘devolución’ destinado a guiar a los estudiantes a experimentar directamente el problema matemático como tal y la creación de un ‘medio’ (material y social) que proporcione a los estudiantes retroalimentación conducente a la evolución de sus estrategias” (p. 331). En esta línea, el docente debe anticipar las posibles acciones y estrategias que el estudiante ejecuta para resolver un problema y así mismo debe proporcionar las retroacciones adecuadas para acompañar el proceso de validación del conocimiento que se construye.

Para realizar un proceso de diseño, es necesario basarse en dos ejes fundamentales: Primero, un marco didáctico que permite entender la forma en la que se produce conocimiento en el estudiante y, en segundo lugar, un marco cognitivo, epistemológico y didáctico del objeto matemático en juego, que permita identificar las características de las actividades pertinentes para la apropiación de dicho objeto. A continuación, presentamos cada uno de los marcos que sustentan el diseño.

### **Marco teórico didáctico.**

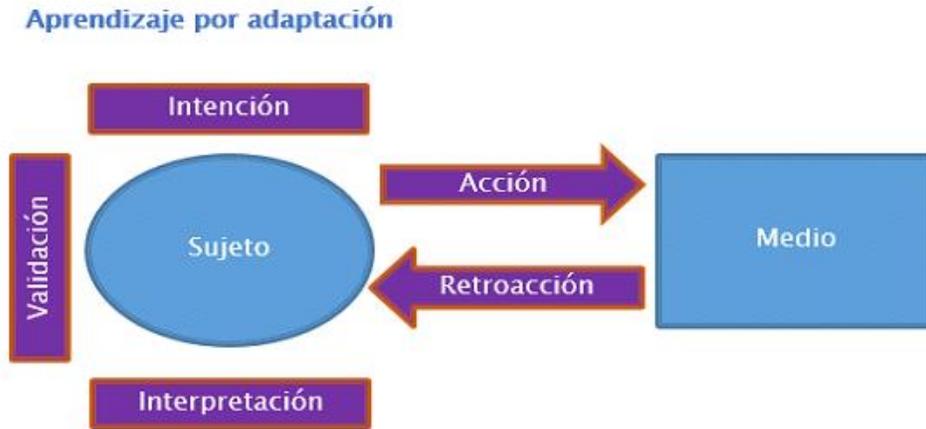
En este apartado se presentan los conceptos fundamentales que la propuesta tiene como objeto de estudio e indagación. Entre ellos, el *aprendizaje por adaptación*, los procesos de *validación* y *devolución*, se fundamentan bajo el referente teórico de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) propuesta por Brousseau (1986). Por otro lado, el concepto de *actividad autónoma*, el cual establece un vínculo entre la teoría que nos permite entender el aprendizaje (TSD) con el recurso particular que se utilizará como medio de intervención didáctica: DGPad-colombia. Por último, se presenta un apartado con una reflexión sobre el diseño de tareas, desde la perspectiva propuesta por Ohtani, Kieran y Doorman (2015) y la influencia que tiene sobre la construcción de una secuencia de tareas, que tiene como fin producir aprendizaje por adaptación relativo al valor posicional.

#### **Aprendizaje por adaptación.**

Brousseau (1986), citado por Margolinas (2009), identifica su concepción de aprendizaje con la de aprendizaje por adaptación, y lo describe como aquel en el que “el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Ese saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por las respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje.” (p. 135).

El proceso de interacción del sujeto con el medio que conduce al aprendizaje por adaptación se ilustra en la siguiente figura, tomada de Acosta (2010):

### Ilustración 1 Aprendizaje por adaptación



En el proceso de interacción del sujeto con el medio, la teoría identifica cinco elementos: el primero de ellos es la **intención**, que corresponde a un propósito, objetivo o necesidad del sujeto. El segundo elemento es la **acción**: para alcanzar su objetivo, el sujeto actúa sobre el medio. El medio reacciona a la acción del sujeto y a esto se le denomina **retroacción** (tercer elemento). El cuarto elemento es la **interpretación**: el sujeto interpreta la retroacción que le provee el medio dotándola de sentido respecto a la intención propuesta. El último elemento es la **validación**: el sujeto juzga sus acciones; es decir, decide si la acción que realizó le sirvió para alcanzar lo que se proponía. Si la validación es negativa, es decir, si el sujeto decide que su acción no le sirvió para alcanzar su intención, se producirá un cambio de acción. Si la validación es positiva, es decir, si el sujeto decide que la acción le sirvió para alcanzar su intención, se producirá un refuerzo de la acción. El cambio de acción y el refuerzo de la acción son dos signos observables del aprendizaje por adaptación.

#### DGPad-Colombia como medio

Desde el punto de vista de la TSD, el software puede considerarse como un medio material con el cual los estudiantes interactúan. Es importante considerar entonces las acciones que pueden realizar los estudiantes y las retroacciones que ofrece el software. El software DGPad-colombia, por ser un software de geometría dinámica, incorpora como parte de su programación un conjunto de acciones y retroacciones que responden al saber geométrico; por ejemplo, si se construye una recta paralela a un segmento, al mover el segmento la recta se mueve manteniendo sus propiedades de equidistancia.

Consideramos dos tipos de retroacciones del software: las retroacciones matemáticas manifiestan características de los objetos que están determinadas por el saber matemático; el ejemplo anterior corresponde a una retroacción matemática, ya que el hecho de que al cambiar la posición del segmento, la recta paralela se mueva obedece a la necesidad de conservar la equidistancia de sus puntos con respecto al segmento. Por otra parte, las retroacciones didácticas son las que no manifiestan características de los objetos determinadas por el saber, sino que obedecen a una intención didáctica puntual, como por ejemplo el hacer que un objeto cambie su aspecto en determinada posición para llamar la atención del estudiante, o el mostrar información que el estudiante pueda utilizar como un referente para la resolución del problema.

La posibilidad de programar retroacciones en el software, utilizando un lenguaje de programación, permite construir medios no geométricos para la interacción de los estudiantes, y abre nuevas posibilidades para la utilización del software en la enseñanza de las matemáticas. En el presente proyecto, la programación de retroacciones permite construir un medio aritmético, en el que las acciones de conteo, agrupación,

desagrupación y la ubicación espacial de los objetos permiten a los estudiantes aprender sobre las diferentes bases de numeración y su relación con el sistema de representación numérica con valor posicional.

Además de estas nuevas retroacciones aritméticas, construidas sobre las retroacciones originales (geométricas) del software, es posible realizar un monitoreo y evaluación permanente de las acciones de los estudiantes en el nuevo medio aritmético, para pilotar el aprendizaje por adaptación por medio de intervenciones automáticas (actos de devolución). Es lo que denominaremos la *automatización de la gestión didáctica* de las situaciones. Esa automatización busca liberar al profesor de la necesidad de hacer un seguimiento individual de la interacción de los estudiantes con el medio, y al mismo tiempo garantizar que esa interacción conduzca a los aprendizajes esperados.

### **Aprendizaje autónomo.**

Habitualmente se relaciona el aprendizaje autónomo con la educación virtual. Sierra (2005) señala que se puede entender el aprendizaje autónomo como “la facultad de dirigir el propio proceso para entender y comprender la realidad” (p.3), es decir, el aprendizaje donde la persona que aprende tiene autonomía con respecto a un profesor o a una institución. Por nuestra parte, no hacemos énfasis en la capacidad de autonomía de los estudiantes (sin que esto signifique que no valoremos esa capacidad), sino en la posibilidad de promover aprendizajes sin la intervención personal directa del profesor.

En efecto, como mencionamos en la introducción, el profesor tiene la responsabilidad de hacer un monitoreo permanente de la actividad y de la comprensión de los estudiantes, con el fin de intervenir de manera diferenciada y adecuada en el

proceso de aprendizaje. En el caso de incorporación de tecnologías informáticas, como el SGD, ese monitoreo permanente también es necesario, para evitar interpretaciones de la actividad por parte de los estudiantes que dificulten el aprendizaje objetivo, y garantizar que la interacción sujeto-medio se desarrolle de acuerdo con el diseño realizado.

El SGD tiene el potencial de promover el aprendizaje autónomo, en el sentido de realizar (al menos en parte) ese monitoreo. DGPad-Colombia tiene herramientas que permiten programar retroacciones matemáticas y didácticas que posibilitan en primer lugar, el aprendizaje por adaptación fruto de la interacción sujeto-software y, en segundo lugar, la automatización de decisiones y acciones didácticas, como la evaluación, la retroalimentación, la posibilidad de avanzar a nuevas tareas o la necesidad de retroceder a tareas anteriores.

## **Marco teórico matemático**

El objeto matemático de estudio se enfoca en la comprensión del sistema de representación numérico con valor posicional. Dicho objeto se compone de diversos conceptos, por lo tanto, es preciso descomponerlo con el objetivo de entenderlo a nivel local y global. En primer lugar, realizamos una aproximación conceptual a las representaciones como elemento constitutivo respecto a los sistemas de representación. Luego nos enfocamos en los tipos de sistemas de representación y la importancia de realizar transformaciones entre registros como eje fundamental en la comprensión del objeto matemático que representan.

Introducimos la idea de sistema de numeración como un tipo de sistema de representación simbólico, acompañado de algunas muestras de sistemas de numeración antiguos con el fin de analizar su estructura y funcionamiento. Presentamos el sistema de numeración decimal y sus características como sistema que incorpora el valor posicional. Proponemos algunas reflexiones y aportes formales a nivel cognitivo que muestran los procesos relativos al valor posicional, así como las estrategias, errores y dificultades que emergen cuando el sujeto entra en contacto con el sistema de numeración decimal.

Por último, presentamos una perspectiva de intervención metodológica que muestra las ventajas del trabajo en diferentes bases de numeración, como actividad que complementa el trabajo con el sistema de numeración decimal en la escuela. En este apartado se muestran los invariantes que aparecen a la hora de reconocer estructuralmente un sistema de numeración con valor posicional.

### ***Sobre las representaciones:***

El concepto de representación posee un grado de complejidad alto respecto a su definición. En matemáticas es indispensable reconocer cuál es la función que cumplen las representaciones en términos de la aprehensión de cualquier objeto matemático. Ortiz (2014) presenta los planteamientos de representación de Kaput & Howard (1987) como una dualidad entre dos entes relacionados, uno es el *objeto representante*, referente al símbolo, a la figura, al modelo. El segundo es el *objeto representado* que hace alusión al mismo objeto, concepto y contenido. Es una relación entre la idea y el objeto representado. Aun así, estas consideraciones de representación resultan problemáticas cuando los objetos representados o ideas son entidades abstractas como aquellas enmarcadas en las matemáticas. Es por ello que nos basamos en la siguiente interpretación cognitiva:

*“... una representación es un modelo mental de carácter cognitivo que hace referencia y se sustenta en las experiencias del sujeto. El término experiencia es considerado en su acepción más general y se refiere tanto a las experiencias externas, en las que el individuo interactúa con el entorno, como a las experiencias internas, por las que el sujeto reflexiona, recuerda, contrasta conocimientos o crea e introduce relaciones y conocimientos nuevos; ambos tipos de experiencias se encuentran relacionadas y tienen como denominador común la actividad intelectual”.* (Ortiz, 2014).

Entonces, las representaciones son un modelo cognitivo que se constituye desde las experiencias del alumno. Toda representación posee dos componentes, la primera que hace referencia a los procesos que reposan en la actividad mental del sujeto y, la segunda

que se percibe en las acciones materializadas con el ambiente en el que se desenvuelve. La dialéctica entre *experiencias internas* y *experiencias externas* es lo que permite consolidar la idea de representación como ente cognitivo.

De acuerdo con la idea anterior, Castro y Castro (2009) realizan una clasificación de las representaciones que permiten aludir a ellas correctamente teniendo en cuenta la experiencia en la que se engendra dicha representación. En primer lugar, las *representaciones internas*, las cuales se entienden como aquellas que hacen parte de la actividad mental del sujeto y por tanto no son observables, como las ideas, pensamientos y operaciones mentales en general, es decir, aquellas que reposan en las experiencias internas. Y, en segundo lugar, están las *representaciones externas* que están asociadas a actividades concretas del sujeto como la comunicación (experiencias externas) y que son susceptibles de ser observadas en registros de representación diversos como gráficos, escritos, lenguaje oral, símbolos, objetos físicos, etc.

A continuación, presentamos un ejemplo que nos permite visualizar con mucha más claridad los tipos de representaciones. En este caso utilizaremos el número como objeto matemático para ejemplificar esta idea. El número es una abstracción matemática que cumple múltiples funciones y nace en términos de la experiencia interna asociada a la actividad del conteo. Observemos la siguiente tabla.

*Tabla 1 formatos de representación*

Formato 1 gráfico 	Formato 2 arábica 2	Formato 3 verbal Dos
--	------------------------	-------------------------

Podemos observar una representación gráfica de una cantidad de semillas, una representación arábica y un formato verbal de la cantidad de objetos. Todos los registros que se muestran en la tabla hacen referencia a las representaciones externas, son observables y se muestran diferentes formatos. Sin embargo, suscitan también la idea de una cantidad determinada asociada a la operación mental del conteo (representación interna).

***Sobre los sistemas de representación:***

El número y su representación han permitido que se consoliden sistemas de representación ordenados, donde se utilizan *objetos representantes* con una serie de reglas que posibilitan ampliar el uso del número y trascender a otras actividades mucho más complejas que el simple conteo. Rico y Romero (1999) muestran una clasificación de las representaciones externas para describir con mucho más detalle la actividad enmarcada en los procesos de transición entre registros. La primera clasificación tiene un carácter simbólico “las representaciones digitales, discretas, de carácter alfanumérico, que se pueden simular mediante programas informáticos y cuya sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas de procedimiento” (p. 123) y el segundo tipo un carácter gráfico: “las representaciones continuas, analógicas, de tipo gráfico o figurativo, cuya sintaxis viene dada principalmente por reglas de composición y convenios de interpretación” (p. 123). Esta clasificación de acuerdo con Rico (1997) hace alusión a dos familias de representaciones que se definen como *sistema de representación simbólico* (SRS) en el primer tipo de representaciones, y *sistema de representación gráfico* (SRG) en el segundo tipo.

Para nuestra investigación es fundamental incorporar estos dos conceptos debido a que el diseño propuesto, trae incorporados el SRS y el SRG como parte de la intervención didáctica en la aprehensión de procesos relativos al valor posicional. Esta idea se ampliará en el siguiente capítulo.

Para introducir el concepto de sistema de representación, presentamos la idea propuesta por Duval (2001) de que la representación necesita tener un sistema que le permita configurar un significado concreto en función del objeto representado:

“una representación jamás puede ser considerada y analizada sin hacer referencia al sistema a través del cual fue producida. Las especificidades del sistema (físico, orgánico o semiótico) que permitieron la producción de una representación, son las que determinan la relación entre el contenido y el objeto representado. El contenido de las representaciones de un mismo objeto cambia en función del sistema por el cual fueron producidas” (p. 18-19).

Duval (2001) citado por Rojas (2012) hace alusión a la importancia del trabajo con diferentes sistemas de representación en el proceso de conceptualización. Lo considera indispensable debido a que los sistemas tienen un carácter complementario. Existen aspectos del objeto matemático a los cuales se tiene acceso mediante un solo sistema; sin embargo, Rojas (2012) afirma que “Duval enfatiza que el uso de más de un sistema de representación y la posibilidad de realizar transformaciones entre los diferentes sistemas resulta ser “una exigencia cognitiva necesaria y fundamental” (p. 18).

El proceso de comprensión enmarcado en las representaciones exige traer un sistema de representaciones que muestren diferentes registros. El estudiante debe estar en

la capacidad de identificar las relaciones entre registros, hacer las conversiones correspondientes y de acuerdo a la experiencia externa con representaciones concretas, pueda dilucidar el objeto matemático. Como pudimos observar en la *Tabla 1*, existen diferentes formatos de un número que representa la misma cantidad. El formato gráfico posibilita hacer una conexión primitiva del número en la acción de correspondencia uno a uno. El formato arábigo, el cual se presenta como un símbolo, trae un significado implícito relacionado a la cantidad. Y, por último, aparece el formato verbal que traduce a un registro hablado la representación de la cantidad. Las traducciones que puedan hacerse de un formato a otro garantizan la proximidad en la comprensión de la idea de número “2” materializado en los diferentes formatos.

### **Sobre los sistemas de numeración como sistemas de representación simbólicos**

Las necesidades del ser humano en tareas de comercio, de pertenencias, de riquezas, de terrenos, entre otras que demandan el uso de cantidades, promovieron por medio del conteo y la correspondencia uno a uno la creación del cardinal. Para definir este concepto nos basamos en Anacona citado por Gutiérrez (2017):

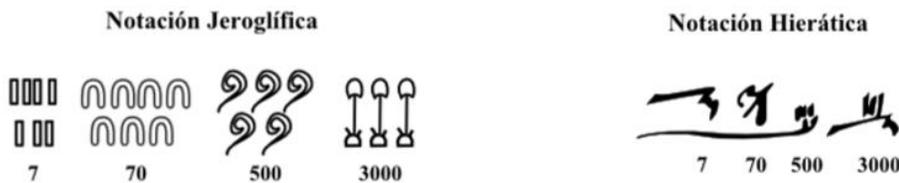
*“En el conteo el número cardinal determina la pluralidad de una colección, mientras el número ordinal es el elemento de un conjunto modelo que se hace corresponder al último componente de la colección, es decir al último elemento en el proceso de contar”*

*(Anacona et al., 1998).*

La necesidad de trabajar con cantidades grandes diferenciando el cardinal y el ordinal del número, condujo a crear nuevas unidades de orden superior, utilizando la

agrupación como la base del sistema de numeración. Blanco, citado por Gutiérrez (2017), afirma que para que el hombre reconozca el concepto de base, primero tiene que ser capaz de reconocer la multiplicidad como una nueva unidad. Es decir, cuando se agrupan multiplicidades se crean unidades de orden superior. Las investigaciones arqueológicas han permitido identificar culturas como por ejemplo los elamitas, que realizaron las primeras simbolizaciones de la cantidad en la superficie de esferas hechas con barro, hacia el año 3.300 a.C. Es uno de los primeros pasos en el proceso de construcción progresiva de representaciones simbólicas de la cantidad dependiendo del sistema de numeración. A continuación, presentamos el sistema numérico y representación simbólica de algunas civilizaciones como la egipcia, romana y maya.

- **Sistema de numeración egipcio:** La civilización egipcia cuenta con dos sistemas de numeración que, según Collette citado por Gutiérrez (2017), son el jeroglífico y el hierático. El sistema jeroglífico es un sistema no posicional, con principio aditivo y con limitantes para representar cantidades grandes. Por otra parte, el sistema hierático es decimal, aditivo y sustituye la repetición de signos por una representación con signos especiales. Por ejemplo, para representar el número 3577 el sistema jeroglífico utiliza 22 signos, mientras en el sistema hierático solo utiliza 4.



- ***Sistema de numeración romana:*** La comunidad romana de igual forma presentan un sistema aditivo, en el que se utilizan letras del alfabeto para representar los números. Este sistema presenta, en comparación con el sistema egipcio, una desventaja de representación, pues se requiere crear un nuevo signo para representar un número de orden superior. Por ejemplo, pasar del número 39 (XXXIX) al número 40 (XL), se requiere el signo L, para interpretar que son diez unidades menos que cincuenta. O para pasar del número 89 (LXXXIX) al número 90 (XC) se requiere el signo C para representar que son diez unidades menos que cien.
  
- ***Sistema de numeración maya:*** El sistema de numeración maya se reconoce por aportar a la elaboración de un sistema posicional y la elaboración del cero. El sistema utiliza símbolos como la concha (0), el punto (1) y la raya (5), su base es veinte, es decir es un sistema vigesimal. Por ejemplo, para representar el número 20 se posiciona una unidad en la parte superior y la concha como ausencia de unidades en la parte inferior, lo que representa un grupo de veinte y cero unidades *“Para esta civilización el cero era considerado como ausencia de unidades de determinado orden”* Ifrah (1987) citado por Gutierrez (2017). Ahora para representar el número 39 se ubica un punto en la parte superior y el símbolo del número 19 en la parte inferior, lo que significa un grupo de veinte y diecinueve unidades. Por lo tanto, para la escritura del número 40 se posiciona dos puntos en la parte superior y el símbolo de la concha en la parte inferior, lo que forma dos grupos de veinte y cero unidades.

0	1	2	3	4
	•	••	•••	••••
5	6	7	8	9
	•	••	•••	••••
10	11	12	13	14
	•	••	•••	••••
15	16	17	18	19
	•	••	•••	••••
20	21	22	23	24
•	•	•	•	•
	•	••	•••	••••
25	26	27	28	29
•	•	••	•••	••••

Ahora bien, expuestos algunos ejemplos de sistemas de numeración como sistemas de representación simbólicos y sus estructuras, vamos a enfocarnos en el sistema de numeración decimal (SND), el cual tiene características particulares que debemos ampliar para comprender su naturaleza y la forma en la que se desarrollan los procesos relativos a su aprehensión.

### **Sistema de numeración decimal: estructura y procesos relativos al concepto**

Todo sistema de numeración posee una serie de parámetros asociados a su estructura y funcionamiento. En el caso de los sistemas de numeración posicional, existen algunas invariantes que definen sus normas de operación. Ortiz (2014) caracteriza dichas invariantes:

1. La base, la cual define como “convenio de agrupación de sus unidades”
2. Unidades: hace referencia a las diferentes categorías: unidades, decenas, centenas.
3. Numerales o cifras signos: definidos para escribir dentro del sistema
4. Las normas de combinación que están asociadas al orden entre numerales
5. Valores: los cuales se dividen en dos categorías,

5.1 “Valor absoluto intrínseco”: hace referencia al valor de las cifras de manera independiente. En el número 456 el cuatro tiene un valor absoluto intrínseco de 4 unidades

5.2 “Valor posicional o relativo”: El cual depende del orden que ocupa una cifra dentro del número. en 456 el número 4 tiene un valor relativo de 400 unidades.

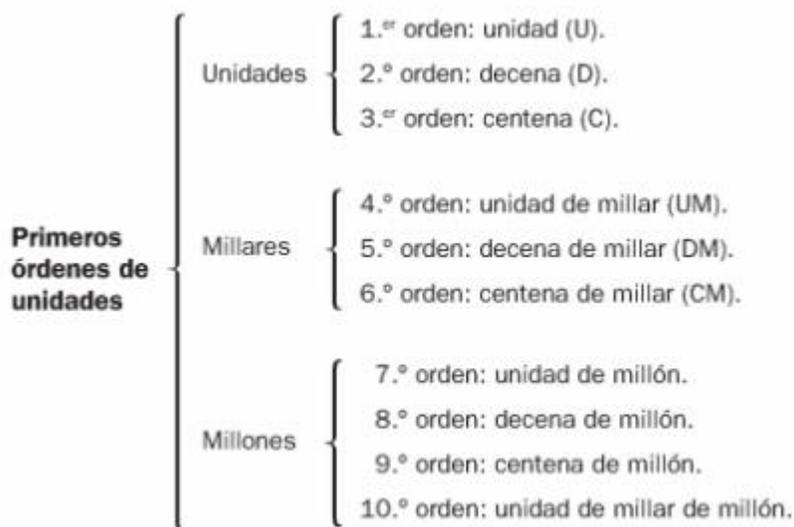
La relación del sujeto con el conocimiento conceptual relativo al sistema de numeración posicional opera bajo algunos principios fundamentales de estructura y orden, así como de procedimientos puntuales operacionales necesarios para su aprendizaje. Castro, Gorgorió y Prat (2015) proponen una caracterización de estos principios y procedimientos.

- *Principios:*

Aquellos que refieren a la estructura del sistema como: “la estructura recursiva multiplicativa del sistema en base 10 del SND (p. 223) la cual representa una norma de combinación que permite consolidar las diferentes clases como unidades, decenas, centenas, etc. “La estructura basada en 10 dígitos” los cuales se combinan de acuerdo a una norma establecida por la base. Y el valor relativo al valor posicional, el cual hace referencia a la cantidad que representa cada cifra de un número respecto a su orden.

Para ampliar la idea sobre los principios del SND hacemos referencia a Salazar (2013), citado por Bedoya y Orozco (1991), quien argumenta de manera detallada tres principios con los cuales se constituye el SND enmarcados en categorías: orden, base y posición.

- Orden: Es el parámetro que define la ubicación de cada uno de los dígitos teniendo en cuenta que la escritura del número en el formato convencional (escritura arábica) se realiza de derecha a izquierda. Así pues, el primer número de derecha a izquierda se denomina de primer orden (unidades), el número que se encuentra inmediatamente después hacia la izquierda se denomina de segundo orden (decenas), el siguiente se denomina de tercer orden (centenas) y así sucesivamente, de acuerdo a la cantidad de cifras que posee el número. A continuación, presentamos un esquema con las denominaciones.



Tomado de Salazar (2013)

- Base: Refiere a la norma de combinación establecida para poder crear unidades de orden superior. Para el caso de sistema de numeración decimal la base es 10. Para conformar una unidad de un orden mayor deben completarse diez unidades del orden inmediatamente anterior “cada vez que se complete un grupo de 10 se pasa al siguiente y así sucesivamente, formando números con dígitos que conforman cifras numéricas cada vez mayores” (p. 31)

- Posición: Es el principio relacionado con el valor que adquiere una cifra dentro del número teniendo en cuenta la posición que ocupa. Por ejemplo, en el número de 83 el valor relativo que representa el número 8 hace referencia a 80 unidades, debido a que la posición que ocupa en el número pertenece al segundo orden, por lo tanto, hace referencia a 8 grupos de diez unidades cada uno.

Adicionalmente, Castro et al. (2015) propone algunos procedimientos que subyacen a los principios fundamentales y que permiten dar significado a la actividad que se realiza con el sistema; son acciones concretas que permiten entrar en contacto con el sistema de numeración y sus reglas operacionales teniendo en cuenta la estructura enmarcada en los principios mencionados en el apartado anterior. Los procedimientos son los siguientes:

- Representar cantidades y números.
- Leer y escribir un número en letras y cifras.
- Identificar el valor de los dígitos de un número.
- Componer, descomponer, combinar, transformar cantidades estructuradas.
- Reconocer y completar particiones y reagrupar números.

Estos procedimientos funcionan como referente en el diseño de esta propuesta, la cual pretende potenciar procesos relativos al valor posicional haciendo uso de un sistema de representación gráfico enmarcado en un medio digital. Es necesario que la actividad propuesta sea lo suficientemente compleja como para suscitar estas acciones, las cuales según Castro et al. (2015) permiten acceder al conocimiento conceptual relativo al valor posicional. En el siguiente capítulo hablaremos con más detalle de la forma en la que se

incorporan estos procedimientos como parte de la interacción sujeto-medio en el diseño y análisis a-priori.

La caracterización propuesta por Castro et al. (2015) presenta de manera implícita una necesidad de intervención didáctica que permita reforzar los procesos cognitivos que se llevan a cabo cuando el sujeto usa el sistema de numeración decimal. Es de vital importancia que el estudiante comprenda mediante acciones concretas los elementos del sistema, como la base, las normas de combinación, sus unidades y sus valores absolutos y relativos. La frecuentación del SND en la vida cotidiana no garantiza un reconocimiento completo de estas características, por lo que se presentan algunos obstáculos y errores a la hora de utilizar el sistema en tareas complejas.

### **Sobre los procesos cognitivos relativos al SND**

El proceso de aprendizaje que se lleva a cabo durante el reconocimiento formal y uso del sistema de numeración base diez, está acompañado de diferentes variables relacionadas con la forma en que el sujeto entra en contacto con el mismo en diferentes actividades previas a la etapa escolar. Fuson (1991) presenta una categorización de etapas de comprensión basadas en la capacidad de comprender y utilizar el sistema de numeración decimal.

Se plantea un modelo que caracteriza a partir de etapas la comprensión del concepto de valor posicional de los dígitos en sistema decimal de representación numérica. La primera etapa corresponde a la “concepción de los multidígitos como elementos unitarios” que se construye a partir de la interacción que tiene el estudiante con los números y dígitos en su registro escrito. La segunda etapa llamada “concepción de

dieces y unos”, en la que los estudiantes reconocen la relación del dígito verbalizado en situaciones específicas, por ejemplo, la composición “41” tiene la misma estructura de “31”. Sin embargo, aún no se tiene conciencia de la idea de agrupaciones y el sentido posicional. Para la tercera etapa existe conciencia de agrupaciones de elementos unitarios, pero el estudiante no identifica aún los grupos de grupos dentro de una agrupación: Medina (2016) apoya esta idea cuando afirma que: “algunos niños no logran identificar en una colección de 50 cuántos grupos de 10 podría haber” (p.148). Por último, en la cuarta etapa, se plantea que los estudiantes ya están en la capacidad de hacer el reconocimiento de la colección y los grupos que la constituyen en el marco del significado general y no particular de los elementos.

Esta clasificación por etapas, aunque tiene un carácter progresivo, no limita la forma en la que pueden manifestarse en el estudiante. Es decir, pueda que existan etapas que el estudiante no demuestre dentro de su de aprendizaje, estas variables dependen del proceso que lleve cada uno de los estudiantes. Podemos observar dentro de la primera categoría que el estudiante permanece en la valoración absoluta de las cifras en el reconocimiento de número con más de una cifra. En la segunda categoría, el estudiante comienza a reconocer el valor relativo cuando ve dos números que tienen un mismo aspecto respecto a su orden y cantidad de cifras. Para la tercera incorpora la estructura aditiva como parte de la actividad intrínseca en el proceso de agrupación de elementos unitarios para la construcción de una unidad de orden superior y por último en la cuarta es posible identificar que el estudiante hace uso de la multiplicación en el reconocimiento de las colecciones de grupos, y es posible extraer el invariante *base* de las agrupaciones.

### **Algunas estrategias, errores y dificultades en la interacción con SND**

A continuación, presentamos una categorización hecha por Scheuer (1993) citado por Medina (2016) acerca de las acciones que realizan los estudiantes cuando manipulan números del sistema con base diez:

“los niños utilizan estrategias como: (a) comparar la cantidad de dígitos de una cifra para establecer su magnitud; (b) establecer correspondencias entre la expresión numérica verbal y arábica; (c) sumar los valores nominales de los dígitos para establecer el valor total de una cifra; (d) utilizar el valor nominal del dígito para establecer su valor posicional correcto” (p.445).

Como podemos observar en esta categorización, no existen estrategias que se enfoquen en procesos como la agrupación, la denominación de grupos o la descomposición del número. Al introducir a los estudiantes en el sistema de numeración se procura trabajar la denominación del valor posicional, unidades, decenas, centenas, etc. Entonces la denominación del número se compone de otras denominaciones que aleja al estudiante de los procesos implícitos en la construcción del número, del sistema de numeración e introduce al estudiante en ocasiones una idea errónea de los valores relativos y absolutos de los dígitos en términos de su posición. Emergen entonces algunos errores y dificultades a la hora de utilizar el sistema de numeración decimal en contextos diferentes a su denominación.

Orozco, Guerrero y Otálora (2007) hacen referencia a uno de los errores que cometen los estudiantes cuando realizan conversiones entre registros de representación de un número decimal. Por ejemplo, cuando se verbaliza el número “cuatrocientos cincuenta

y dos” el estudiante toma este elemento fonético como literal al momento de redactarlo en el registro escrito: “400502”.

Várelas y Becker (1997) encuentran que niños de 2º, 3º y 4º grado no identifican el valor de posición de los dígitos en una cifra y sólo reconocen su valor nominal, por ejemplo, establecen que el dígito “1” en 14 o 18 siempre vale “1”, pero no su valor total (que el “1” en 14 o 18 vale “10”). En el caso anterior, el reconocimiento del “1” se reduce a su valor absoluto, sin tener presente el valor relativo que se asigna de acuerdo a su posición. Por ejemplo, en 14 el 1 representa en realidad una unidad de orden superior, una decena o un grupo de diez.

Los autores también sugieren que la comprensión del valor de posición depende de la adquisición conceptual de la función simbólica de lugar, más que de la comprensión procedimental generada en el intercambio de ítems numéricos.

### **Sobre el trabajo en diferentes bases de numeración**

El aprendizaje del sistema de numeración decimal necesita del desarrollo previo de procesos de conteo, agrupación, descomposición, lectura, escritura como ya lo hemos mencionado anteriormente. Aun así, la comprensión del concepto requiere de otros elementos de índole procedimental que promuevan la interiorización de los principios que constituyen el sistema de numeración decimal de manera que el estudiante pueda hacer uso del sistema de numeración como herramienta para la resolución de problemas.

Los procesos mencionados anteriormente son expuestos implícitamente en la necesidad de proponer otras estrategias que posibiliten el aprendizaje del valor posicional a partir de diferentes bases. Arredondo y Zulay (2010) afirman que el aprendizaje del

sistema por medio de otras bases permite lograr una comprensión mayor del funcionamiento de los sistemas posicionales de numeración; plantean que a la vez se presenta una mejora en el razonamiento de los procesos operacionales en el sistema de base diez:

“- Los estudiantes obtienen una mayor comprensión de los sistemas posicionales de numeración.

- En los procesos de operacionalización en otras bases diferentes al sistema de numeración decimal, los estudiantes demuestran una mejor interpretación en la ejecución de algoritmos para la solución de problemas.
- Se evidencia un mejor razonamiento de la lógica de los procesos operacionales del sistema de numeración decimal
- Se identifica un desarrollo importante del pensamiento lógico y mejor estructurado por parte de los estudiantes.” (p. 672).

Con base en la premisa anterior, trabajamos bajo la hipótesis que al llevar a cabo tareas en bases diferentes a la diez se ofrece la posibilidad de identificar los principios básicos del sistema de numeración con valor posicional y discriminar las invariantes del sistema como la base y su relación con las normas de combinación, el uso de las cifras enmarcadas en el principio de orden, así como su valor dependiendo de la posición que ocupan en el número. El reconocimiento de los parámetros anteriores en un sistema de base diferente a la diez permite que el trabajo con el SND sea mucho más eficaz y consciente frente a su estructura.

## **Capítulo 4**

### **Metodología**

La metodología empleada en este proyecto se enmarca en la ingeniería didáctica propuesta por Artigue (1995), incluye:

- Análisis preliminar que consiste en el proceso de indagación acerca de los elementos conceptuales, su epistemología e implicaciones cognitivas.
- Diseño y análisis a priori, donde se anticipan las posibles acciones de los estudiantes al interactuar con el medio, y se muestra el efecto de las retroacciones de dicho medio en el aprendizaje por adaptación.
- Un pilotaje que permite obtener datos sobre la interacción de estudiantes reales con el medio diseñado
- Por último, un análisis a-posteriori que permite contrastar el resultado en la interacción durante el pilotaje y lo previsto en el análisis a-priori.

## Capítulo 5

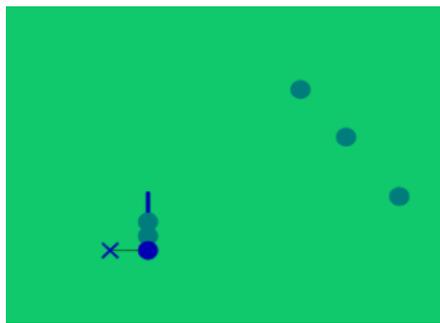
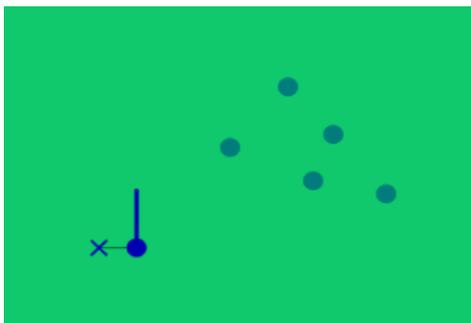
### Diseño y análisis a-priori

El propósito de las tareas propuestas es que los estudiantes asocien las operaciones de agrupación y desagrupación con la representación posicional de una cantidad dada. Es decir, que puedan interpretar las ‘decenas’ como grupos de unidades, y las ‘centenas’ como grupos de decenas, y puedan calcular cuántos grupos de unidades (decenas) pueden formar con una cantidad dada de unidades, cuántos grupos de decenas (centenas) pueden formar con una cantidad dada de decenas. Al terminar las tareas, los estudiantes deben estar en capacidad de resolver dos tipos de problema para distintas bases: 1) Dada una cantidad, ¿cómo representarla en numeración posicional? (corresponde a la operación de agrupación) 2) Dada una representación en numeración posicional, ¿qué cantidad representa? (corresponde a la operación de desagrupación).

El medio material del sistema de representación gráfico con el cual se trabajarán las operaciones de agrupación y desagrupación utiliza dos metáforas: 1) la metáfora del ábaco: fichas que pueden ensartarse en varillas.

*Figura 1*

*Puntos verdes insertados en las varillas*



2) la metáfora del ‘minicomputador de Papy’: casillas que contienen fichas y representan diferentes unidades.

*Figura 2*

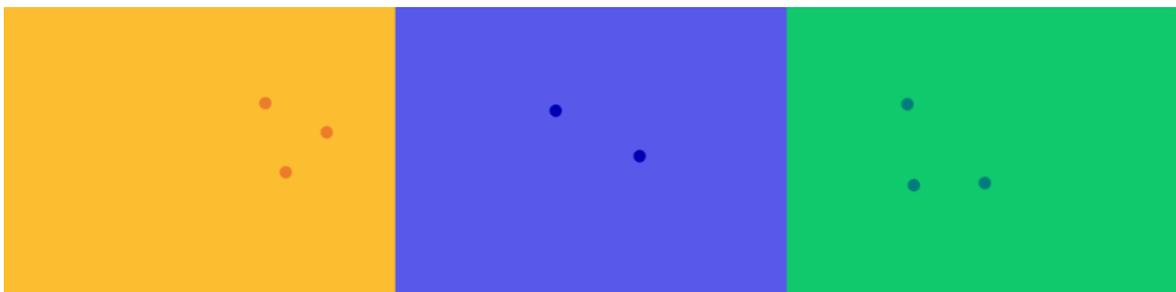
*Metáfora minicomputador de Papy*



De manera que existen tres tipos de fichas: las fichas verdes, que solo pueden estar en la casilla verde y que representa la unidad de primer orden, las fichas azules que sólo pueden estar (como fichas) en la casilla azul y representan la unidad de segundo orden, y las fichas naranjas, que solo pueden estar (como fichas) en la casilla naranja representan la unidad de tercer orden.

*Figura 3*

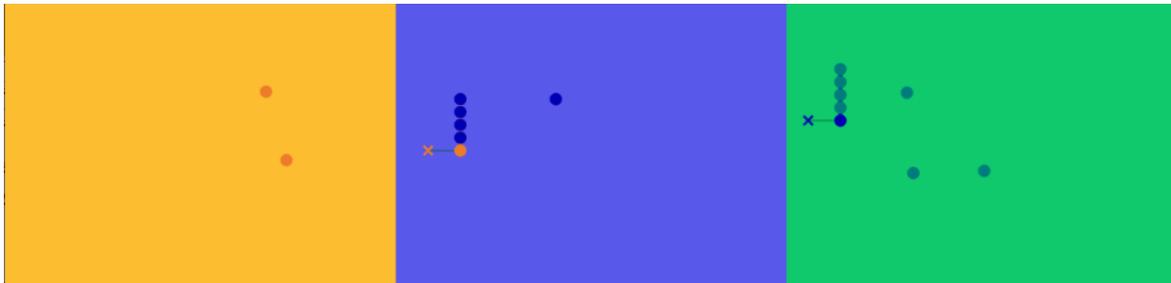
*Fichas verdes, azules y naranjas*



Pero por su parte, una ficha azul es en realidad una varilla llena con fichas verdes y una ficha naranja es en realidad una varilla naranja llena de fichas azules.

*Figura 4*

*Elementos constitutivos de las fichas naranjas y azules*



Las varillas azules sólo aparecen en la casilla verde, las varillas naranjas sólo aparecen en la casilla azul. Si las varillas no están completamente llenas (con el número de fichas correspondiente a la base) no pueden pasar a la siguiente casilla. En cada varilla sólo puede ponerse un número fijo de fichas, correspondiente a la base en la que se está trabajando.

La estructura interna de las casillas y varillas está diseñada de tal manera que puede asignarse una base entre 2 y 12. Por tanto, funciona una norma de combinación relacionada con la agrupación de los elementos en las varillas, dicha norma se define como: cantidad de puntos por varilla = base, la constitución de unidades de segundo y tercer orden está enmarcada en la constitución completa de grupos de la unidad inmediatamente anterior.

En resumen: las fichas pueden agruparse en las varillas, y las varillas llenas se convierten en fichas al pasarlas a la siguiente casilla. Esa es la operación de agrupación.

Pero también es posible tomar por ejemplo una ficha azul y pasarla a la casilla verde, donde se convierte en una varilla azul llena, y desocupar esa varilla. Lo cual corresponde a la operación de desagrupación.

Estos comportamientos de las casillas, las fichas y las varillas corresponden a lo que llamamos *retroacciones matemáticas* del medio, y se espera que contribuyan a un aprendizaje por adaptación, permitiendo a los estudiantes construir estrategias de interpretación de la representación de cantidades utilizando la numeración posicional.

Resumiendo, las siguientes son las retroacciones matemáticas del medio:

1. Cuando se intenta arrastrar un elemento unitario (punto verde o punto azul) hacia la casilla de la izquierda (azul o naranja), se detiene en la frontera de las dos casillas. Corresponde al código de representación posicional: una posición determinada corresponde a un determinado tipo de ‘unidad’, las unidades de tipos diferentes ocupan posiciones diferentes y no son equivalentes, no pueden intercambiarse.
2. Al arrastrar un elemento unitario acercándolo a una varilla, el elemento unitario se pega a la varilla y ya no puede ser despegado. Corresponde a la materialización de la operación de agrupación: las varillas sirven como ‘agrupadores’ de unidades.
3. Cuando la varilla tiene agrupados una cantidad de puntos igual a la base, impide que otras fichas puedan agruparse en esa varilla; al acercar los puntos a la varilla los rechaza. Corresponde al código de representación posicional: una ‘unidad’ de orden superior representa siempre la misma cantidad de ‘unidades’ de orden inferior, es la agrupación de un número fijo de ‘unidades’ de orden inferior.

4. Al arrastrar la varilla hacia la casilla de la izquierda, se detiene en la frontera si la varilla tiene agrupados una cantidad de puntos inferior a la base. Corresponde al código de representación posicional: las agrupaciones menores a la base no corresponden a unidades de orden superior, y por lo tanto no pueden ocupar la posición de esas unidades de orden superior.
5. Si una varilla tiene agrupados una cantidad de puntos igual a la base, al arrastrar la varilla hacia la casilla de la izquierda le permite avanzar y al entrar en la casilla de la izquierda se oculta la varilla y los puntos que contiene, solo queda visible el punto del color de la varilla. Corresponde al código de representación posicional: La ‘varilla llena’ se convierte en ‘un punto’ en la casilla de la izquierda: se constituye un grupo de acuerdo a la base, por lo tanto, un elemento unitario de orden superior, que debe ocupar la posición correspondiente.
6. Al arrastrar un punto (azul o naranja) a la casilla de la derecha, se muestra la varilla correspondiente con los puntos que contiene. Corresponde al código de representación posicional: ‘Un punto’ se convierte en ‘una varilla llena’ en la casilla de la derecha, un elemento unitario de orden superior corresponde a un grupo de unidades de orden inferior
7. Al oprimir la x que se encuentra al lado izquierdo de cada varilla, los puntos que contiene la varilla se desplazan a la derecha y pueden arrastrarse de manera independiente. Corresponde a la materialización de la operación de desagrupación: La varilla se ‘desocupa’.

### **Trabajo en diferentes bases**

El medio material (figura dgpad) diseñado permite trabajar en cualquier base entre 2 y 12. La elección de la base la hace el profesor, y determina la longitud de las varillas, es decir cuántas fichas puede contener una varilla. De acuerdo con Arredondo y Zulay (2010), el trabajo en diferentes bases de numeración mejora la interpretación de la numeración posicional. Nuestro diseño prevé un trabajo inicial en una base menor que 10 seguido de un trabajo en base 10.

### **Tres tipos de tarea**

El diseño prevé tres tipos de tareas: de introducción, de exploración y de anticipación.

Las tareas de introducción tienen como propósito la familiarización del estudiante con el medio material y su funcionamiento: la identificación de las fichas, las varillas, la posibilidad de agrupar las fichas en las varillas, de desocupar las varillas, de pasar varillas

llenas a la siguiente casilla, de pasar fichas a una casilla anterior (donde se convierten en varillas llenas).

En las tareas de exploración y de anticipación, el estudiante debe responder los dos tipos de pregunta relacionados con la numeración posicional, que corresponden a las operaciones de agrupación y desagrupación<sup>1</sup>: 1) dada una cantidad de fichas verdes, ¿cuántas fichas naranja y cuántas fichas azules pueden crearse, y cuántas fichas verdes quedan sin agrupar? 2) Si se tiene un número dado de fichas naranja, de fichas azules y de fichas verdes, ¿a cuántas fichas verdes equivalen?

La diferencia entre las tareas de exploración y las de anticipación radica en el uso que hace el estudiante del medio material para responder las preguntas. Si antes de responder la pregunta, el estudiante realiza las operaciones de agrupación o desagrupación manipulando el medio material y ‘lee’ la respuesta representada en dicho medio, está realizando una tarea de exploración. Si el estudiante responde la pregunta sin haber manipulado el medio material, se considera una tarea de anticipación. Más adelante explicaremos las ideas que fundamentan el diseño de estos tipos de tareas.

### **Dos niveles de dificultad**

Todas las tareas programadas en el software tienen dos niveles de dificultad que corresponden al uso de elementos en dos casillas (Nivel 1) o tres casillas (Nivel 2). Es decir, al agrupar o descomponer elementos que pertenecen a las dos primeras casillas (unidades y decenas) se considera como tareas de primer nivel. Al agrupar o

---

<sup>1</sup> Hacemos referencia a la agrupación y la desagrupación como dos procedimientos subyacentes al uso del sistema de numeración posicional propuesto por Castro et, al. (2015) asociados a: componer, descomponer, combinar y transformar cantidades estructuradas.

descomponer elementos que pertenecen a las tres casillas (unidades, decenas y centenas), se consideran tareas de segundo nivel. En el nivel uno el estudiante comprende la constitución de un grupo (decenas) a partir de elementos unitarios (unidades), la primera idea de colección. En las tareas del nivel dos el estudiante comprende la colección de colecciones como la constitución de un grupo a partir de otros grupos que a su vez se constituyen de elementos unitarios.

### **Retroacciones didácticas**

Además de las retroacciones matemáticas, el diseño incluye lo que llamamos *retroacciones didácticas* del medio: son retroacciones que no representan ideas matemáticas (en este caso relativas al sistema de numeración posicional), sino que responden a una intención didáctica: comunicar una tarea al estudiante, comunicar una información al estudiante, evaluar las acciones del estudiante para proponer nuevas tareas o posibilidades de verificación experimental, gestión de la secuencia de actividades. Las retroacciones didácticas son diseñadas como *actos de devolución*; es decir, buscan reforzar el aprendizaje por adaptación que se produce por la interacción del sujeto con el medio.

### **Automatización de la gestión didáctica**

La ejecución de una secuencia de actividades implica un proceso de gestión didáctica, que supone la supervisión/evaluación del desarrollo de las actividades para controlar el proceso y tomar decisiones de inicio/finalización, avance/retroceso. Esa gestión didáctica normalmente está a cargo del profesor. Sin embargo, es posible automatizar parte de ese proceso, con la intención de facilitar el trabajo del profesor,

especialmente cuando debe estar a cargo de un gran número de estudiantes y no es posible que realice un seguimiento minucioso de lo que hace cada uno de ellos.

El diseño de esta ingeniería requiere que el estudiante trabaje en los tres tipos de tarea previstos, cada tipo de tarea en los dos niveles de dificultad. Además, requiere un ir y venir entre ejercicios de exploración y ejercicios de anticipación. Finalmente, se prevé una interacción secuencial primero con una base menor que diez, luego con la base 10.

Cada tarea se propone mediante un enunciado escrito que aparece en la parte superior de la ventana. Ese enunciado solicita realizar alguna acción sobre el medio (tareas de introducción) o plantea una pregunta sobre el número de fichas (verdes, azules, naranja) que se obtendrán al realizar las acciones sobre el medio (tareas de exploración/anticipación). El estudiante puede manipular los elementos del medio para resolver la tarea, es decir realiza acciones sobre el medio y recibe retroacciones (matemáticas y/o didácticas) a dichas acciones. Para responder las preguntas, deberá llenar las casillas correspondientes que aparecen en la parte superior de la ventana. Para terminar el ejercicio, debe oprimir el botón Terminar; de esta manera explicita su decisión de dar por finalizado el ejercicio, y posibilita la evaluación (interna) de sus acciones o de sus respuestas, con miras a una decisión de dejarlo o no continuar, solicitarle revisar sus estrategias, solicitarle una verificación experimental, solicitarle reflexionar sobre sus acciones, o incluso regresar a una etapa anterior.

### **Análisis a priori**

A continuación, presentamos el análisis detallado de la interacción sujeto-medio para las tareas de introducción. En estas tareas se espera que el estudiante se familiarice

con los elementos del medio material y su funcionamiento, integrando ese funcionamiento en las operaciones de agrupación y desagrupación. En este análisis mostramos cómo las retroacciones del medio promueven aprendizajes por adaptación (abandono de las acciones que no se adecúan a los códigos de la representación posicional de los números y refuerzo de las acciones que sí se adecúan a ese código). Esos aprendizajes por adaptación posibilitan la identificación de invariantes (todas las varillas contienen el mismo número de fichas, las varillas llenas se convierten en fichas en la casilla de la izquierda, no es posible pasar a la casilla de la izquierda un grupo de fichas menor a la base, etc.), y esos invariantes permiten concebir estrategias para calcular las respuestas a las preguntas sobre la agrupación y la desagrupación.

## **1. Tareas de introducción**

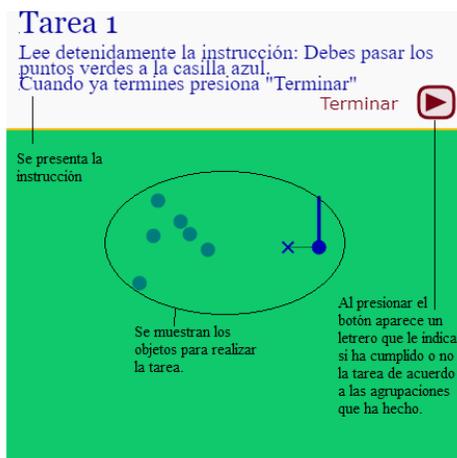
### **1.1 Agrupación**

#### ***1.1.1. Descripción del medio.***

Previo a la resolución de problemas en las tareas de exploración y anticipación, el estudiante interactúa con las tareas de introducción. En estas tareas, el estudiante descubre cómo se realizan las agrupaciones y desagrupaciones haciendo uso de las varillas y los puntos. Establece las relaciones existentes entre la cantidad de puntos que se pueden agrupar en una varilla y la cantidad de fichas que puede haber en una casilla. En la pantalla aparecen:

- el enunciado: “Tarea 1: Lee muy bien la siguiente instrucción: Debes pasar los puntos a la casilla azul. Cuando ya termines presiona “Terminar””,
- $n$  puntos verdes y  $m$  varillas azules ( $base < n < base^2$ ,  $0 < m < base$ ),
- y un botón Terminar.

Figura 5 - Aspecto de la tarea de introducción-agrupación (nivel1)



### 1.1.2. Análisis a-priori

#### Nivel 1

La primera tarea propone al estudiante mover los puntos verdes a la casilla azul: “Lee detenidamente la siguiente instrucción: Debes pasar los puntos verdes a la casilla azul”. (En la casilla verde aparecen  $n$  fichas verdes, con  $base < n < base^2$ ).

**Intención 1(general):** Mover todos los puntos verdes a la casilla azul.

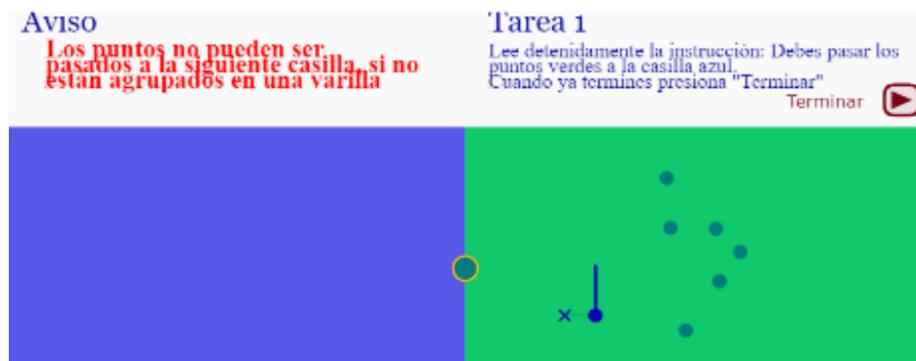
**Subintención 1.1:** Mover un punto verde a la casilla azul.

**Acción 1.1:** arrastrar un punto verde hacia la casilla azul.

**Retroacción 1.1 (matemática):** el punto se detiene en la frontera entre las dos casillas (a pesar de que el cursor se desplace dentro de la casilla azul)

**Retroacción 1.2 (didáctica):** al acercar el punto al límite de la casilla aparece (en la parte superior de la ventana) un letrero emergente rojo: “Los puntos no pueden ser pasados a la siguiente casilla si no están agrupados en una varilla”

Figura 6 - Retroacción bloqueo de la posición del punto y letrero emergente



Se espera que gracias a estas dos retroacciones el estudiante invalide la acción, es decir, que comprenda que los puntos no pueden pasarse individualmente a la siguiente casilla, y, por tanto, abandone dicha acción y pruebe una acción nueva.

**Subintención 1.2:** Mover una varilla a la casilla azul

**Acción 1.2:** mover una varilla sin llenar a la casilla azul.

**Retroacción 1.2 (matemática):** Se bloquea el movimiento de la varilla en la frontera entre la casilla azul y la verde.

**Retroacción 1.3 (didáctica):** aparece el letrero: “Las varillas no pueden ser pasadas a la siguiente casilla, si no están llenas. Revisa por favor.”

Se espera que gracias a estas dos retroacciones el estudiante invalide la acción, es decir, que comprenda que las varillas sin llenar no pueden pasarse a la siguiente casilla, y, por tanto, abandone dicha acción y pruebe una acción nueva.

Figura 7 - Retroacción bloqueo de la posición de la varilla sin llenar



**Subintención 1.2.1:** Poner todos los puntos verdes en la varilla azul.

**Subintención 1.2.1.1:** Poner un punto verde en la varilla azul.

**Acción 1.2.1.1:** arrastra un punto verde hacia la varilla azul.

**Retroacción 1.2.1.1 (matemática):** El punto queda pegado a la varilla.

Se espera que, gracias a esta retroacción, el estudiante valide su acción y la refuerce, es decir que la utilice nuevamente para poner otros puntos en la varilla.

**Subintención 1.2.1.2:** Poner un punto verde en la varilla azul llena.

**Acción 1.2.1.2:** El estudiante acerca un punto verde a una varilla que ya contiene un número de puntos igual a la base.

**Retroacción 1.2.1.2 (matemática):** Al acercar una ficha a una varilla que ya contiene un número de fichas correspondiente a la base, esa ficha es ‘rechazada’ por la varilla, impidiendo su superposición.

Se espera que gracias a esa retroacción el estudiante invalide su acción y la abandone.

**Subintención 1.2.2:** Mover la varilla llena a la casilla azul.

**Acción 1.2.2:** El estudiante arrastra una varilla llena hacia la casilla izquierda

**Retroacción 1.2.2 (matemática):** cuando la varilla está completamente llena el software le permite pasarla a la casilla de la izquierda.

**Retroacción 1.2.3 (matemática):** Cuando la varilla llena pasa a la siguiente casilla, los puntos que tiene pegados y las líneas que la constituyen desaparecen y queda únicamente la base de la varilla (un punto).

Se espera que gracias a estas dos retroacciones el estudiante valide su acción y la refuerce, repitiéndola con las demás varillas.

### **Automatización de la gestión didáctica**

El diseño requiere que el estudiante resuelva cada ejercicio (de agrupación o desagrupación) una vez para cada nivel de dificultad.

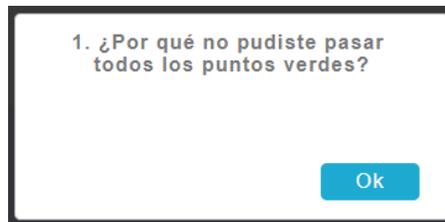
Las decisiones están programadas en el botón Terminar, con el cual el estudiante comunica al sistema su decisión de dar por terminada la tarea.

Existen dos posibles escenarios:

1. Aún no se han realizado todas las agrupaciones posibles: se muestra el letrero “Aún no has terminado la tarea, lee bien la instrucción”.
2. Ya se han realizado todas las agrupaciones posibles: se muestra una serie de preguntas que se solicita al estudiante responder en su cuaderno:

Las preguntas que se le proponen al terminar tienen el objetivo de hacerle tomar conciencia de sus acciones, de los resultados de esas acciones, y así dotar de sentido las agrupaciones que ha realizado.

*Figura 8 - Pregunta 1*



Con esta pregunta, se espera reforzar en el estudiante la toma de conciencia de que no (siempre) es posible pasar todos los puntos a la casilla anterior.

*Figura 9*

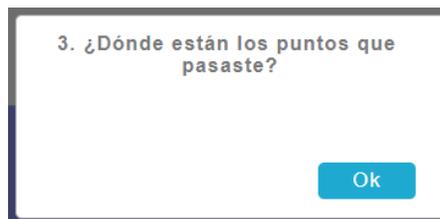
*Pregunta 2*



Con esta pregunta, se espera que el estudiante tome conciencia del número de puntos verdes que pudieron pasarse, es decir los que pudieron agruparse en las varillas

*Figura 10*

*Pregunta 3*



Con esta pregunta se espera que el estudiante tome conciencia de que los puntos (aunque invisibles) están agrupados en las varillas correspondientes a los puntos que están en la casilla 'superior'.

Al terminar con el nivel 1 de la tarea de introducción el estudiante tiene acceso al botón "Siguiete Tarea" el cual está programado para continuar la secuencia de actividades, es decir, proponer el **nivel 2**. A diferencia del nivel 1, el número de puntos verdes que aparecen en la casilla verde es  $base^2 < n < base^3$ . Algunas de las acciones posibles para agrupar ya han sido descritas en el nivel 1. Para continuar con el análisis a priori, proponemos únicamente las interacciones diferentes que pueden aparecer.

**Intención 1 (general):** Mover los puntos verdes a la casilla naranja.

**Subintención 1.3:** mover los puntos azules de la casilla azul a la casilla naranja.

**Acción 1.3:** arrastrar un punto azul a la casilla naranja

**Retroacción 1.3** (*matemática*): se bloquea la posición del punto en la frontera entre la casilla azul y la casilla naranja.

**Retroacción 1.4** (*didáctica*): aparece un letrero emergente “Los puntos no pueden ser pasados a la siguiente casilla si no están agrupados”

Se espera que gracias a estas dos retroacciones el estudiante invalide la acción, es decir, que comprenda que los puntos no pueden pasarse individualmente a la siguiente casilla, y, por tanto, pruebe una acción nueva.

**Subintención 1.3.1:** poner todos los puntos azules en la varilla naranja.

**Subintención 1.3.1.1:** poner un punto azul en una varilla naranja.

**Acción 1.3.1.1:** arrastrar un punto azul hacia la varilla naranja.

**Retroacción 1.3.1.1** (*matemática*): el punto se pega a la varilla naranja.

Se espera que el estudiante interprete el hecho de pegar un punto a la varilla como una acción coherente con la agrupación y, de acuerdo con lo anterior, valide positivamente y refuerce la acción con los demás puntos. A su vez, se espera que el estudiante comprenda este hecho se repite en cualquier casilla siempre que acerque un punto a una varilla.

**Subintención 1.3.1.2:** poner un punto azul en una varilla que ya está llena.

**Acción 1.3.1.2:** El estudiante acerca un punto verde a una varilla que ya contiene un número de puntos igual a la base.

**Retroacción 1.3.1.2:** (*matemática*) Al acercar un punto azul a una varilla naranja que ya contiene un número de puntos correspondiente a la base, esa ficha es ‘rechazada’ por la varilla, impidiendo su superposición.

Se espera que el estudiante interprete la retroacción del rechazo y le sirva para tomar conciencia de que no puede pegar una cantidad de puntos  $k$  mayores a la base. Por lo tanto, invalide y abandone la acción que ejecutó.

**Subintención 1.3.2:** mover la varilla naranja llena a la casilla naranja.

**Acción 1.3.2:** El estudiante arrastra una varilla llena hacia la casilla izquierda (casilla naranja).

**Retroacción 1.3.2** (*matemática*): el software le permite pasarla a la casilla de la izquierda.

**Retroacción 1.3.3** (*didáctica*): Cuando la varilla llena pasa a la siguiente casilla, los puntos que la constituyen desaparecen y queda únicamente la base de la varilla (un punto).

Se espera que el estudiante interprete el hecho de poder avanzar de casilla como la forma de constituir un elemento de un orden superior. De acuerdo con lo anterior, se espera que valide positivamente su acción y la refuerce.

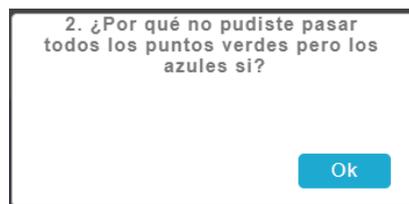
### **Automatización de la gestión didáctica**

Al igual que en el primer nivel, el estudiante comunica su decisión de dar por terminada la tarea oprimiendo el botón “Terminar”. Al hacer clic en el botón los posibles escenarios son:

1. Aún no se han realizado todas las agrupaciones posibles: se muestra el letrero “Aún no has terminado la tarea, lee bien la instrucción”.
2. Ya se han realizado todas las agrupaciones posibles: se muestra una serie de preguntas que se solicita al estudiante responder en su cuaderno.

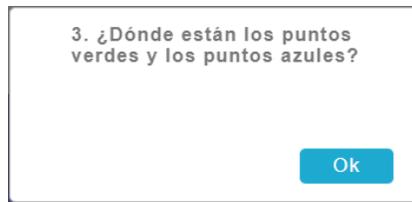
Las preguntas que se le proponen al terminar tienen el objetivo de hacerle tomar conciencia de sus acciones, de los resultados de esas acciones, y así dotar de sentido las agrupaciones que ha realizado. En este caso se hacen preguntas asociadas al proceso de agrupación que se duplica para pasar de la casilla verde a la casilla naranja una de las diferencias con el nivel 1.

*Figura 11 - Pregunta 2 al terminar la tarea de introducción-agrupación nivel 2*



Con esta pregunta, se espera que el estudiante tome conciencia sobre la necesidad de formar  $n$ -base unidades de segundo orden para poder construir una unidad de tercer orden. Y que además, al no tener una cantidad  $n$  de puntos verdes no es posible pasarlos a la siguiente casilla.

Figura 12 - Pregunta 3 al terminar la tarea de introducción-agrupación nivel 2



Con esta pregunta se espera que el estudiante tome conciencia de la característica constitutiva que tiene los puntos naranjas, es decir, que dentro de un punto naranja hay  $n$ =base puntos azules y  $k$ =base<sup>2</sup> puntos verdes.

Las preguntas que se formulan, al final de cada una de las tareas, tienen el objetivo que el estudiante reconozca una serie de *invariantes* que dan cuenta de la lógica de resolución en las tareas relativas al valor posición. En las tareas de agrupación se espera que se puedan identificar dos invariantes: el primero, todas las varillas se llenan con el mismo número de puntos y el segundo, una varilla llena se convierte en un punto al pasar a la casilla de la izquierda.

Estos invariantes se espera que formen parte constitutiva en la creación de estrategias de solución cuando el estudiante se enfrente las tareas de exploración-anticipación.

## 1.2. Desagrupación

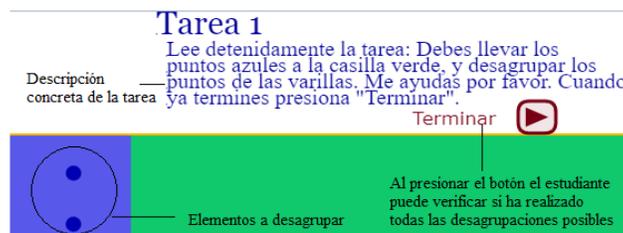
El proceso de agrupación está acompañado por un proceso complementario que permite verificar la cantidad de elementos unitarios (unidades) que componen unidades de orden superior (decenas y centenas), la desagrupación.

### 1.2.1 Descripción del medio

Las características de la tarea de introducción-desagrupación son similares a las de agrupación. En la pantalla aparecen los siguientes elementos:

- Tarea 1: “Lee detenidamente la tarea: Debes llevar los puntos azules a la casilla verde y desagrupar los puntos de la varilla. Cuando ya termines presiona “Terminar””,
- n puntos azules ( $n < \text{base}$ )
- y un botón “Terminar”.

Figura 13 - Tarea de introducción-desagrupación nivel 1



En la segunda tarea que corresponde al segundo nivel se presenta en la pantalla:

- El enunciado: “Tarea 2: Hola, mi trabajo es traer los elementos de los puntos naranjas a la casilla verde. Me ayudas por favor. Cuando ya termines presiona el botón “Terminar””
- m puntos naranjas ( $m < \text{base}$ )
- y un botón “Terminar”.

Figura 14 - Tarea de introducción-desagrupación nivel 2



### 1.2.2 Análisis a-priori

#### Nivel 1:

La primera tarea, propone le propone al estudiante: “Lee detenidamente la siguiente instrucción: Debes llevar los puntos azules a la casilla verde y desagrupar los puntos de las varillas”. (En la casilla azul aparecen  $n$  puntos azules, con  $0 < n < \text{base}$ ).

**Intención 1 (general):** mover los puntos azules a la casilla verde y desagrupar los puntos verdes

**Subintención 1.1:** mover un punto azul a la casilla verde.

**Acción 1.1:** arrastrar el punto azul hacia la casilla verde.

**Retroacción 1.1 (matemática):** al pasar de la casilla azul a la casilla verde, los puntos se convierten en varillas azules, cada una con  $n$  puntos verdes ( $n = \text{base}$ ).

Se espera que el estudiante, al poder visualizar los puntos que constituyen una varilla, interprete este hecho como coherente con el proceso de desagrupación, valide positivamente su acción y la refuerce.

**Subintención 1.2:** Desagrupar los puntos verdes de la varilla azul.

**Acción 1.2:** quitar un punto verde de la varilla azul.

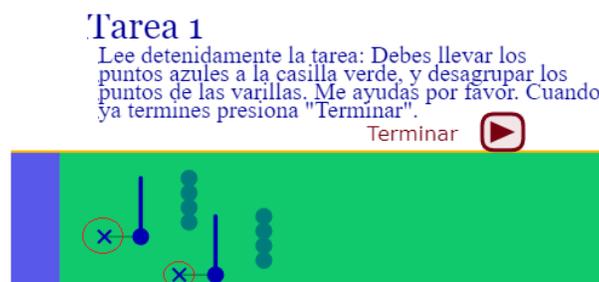
**Retroacción 1.2** (*matemática*): el punto queda pegado en la varilla, es decir, no se desplaza.

Se espera que el estudiante comprenda que no puede desagrupar los puntos de la varilla de manera individual, abandone la acción que ejecutó y pruebe una acción nueva.

**Acción 1.3:** Hacer clic en la herramienta “x” de la varilla.

**Retroacción 1.3:** (*matemática*): Los puntos se separan de la varilla.

*Figura 15 - Puntos desagrupados con la herramienta "x" de las varillas*



Se espera que el estudiante refuerce esta acción.

### **Automatización de la gestión didáctica**

Las decisiones están programadas en el botón Terminar, con el cual el estudiante comunica al sistema su decisión de dar por terminada la tarea.

Existen dos posibles escenarios:

1. Aún no se han realizado todas las desagrupaciones posibles: se muestra el letrero “Aún no has terminado la tarea, lee bien la instrucción”.
2. Ya se han realizado todas las desagrupaciones posibles: se muestra una serie de preguntas que se solicita al estudiante responder en su cuaderno.

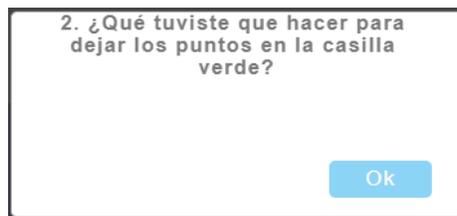
Las preguntas que se le proponen al terminar tienen el objetivo de hacerle tomar conciencia de sus acciones, de los resultados de esas acciones, y así dotar de sentido las desagrupaciones que ha realizado.

*Figura 16 - Pregunta 1 al terminar la tarea de introducción-desagrupación nivel 1*



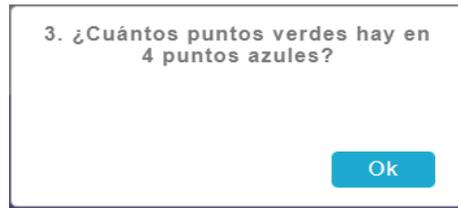
Con esta pregunta se espera que el estudiante tome conciencia de que la cantidad de puntos verdes  $n$  que hay en una varilla se mantiene en todas, es decir, el cardinal de puntos verdes por varilla se mantiene.

*Figura 17 - Pregunta 2 al terminar la tarea de introducción-desagrupación nivel 1*



Con esta pregunta, se espera que el estudiante responda que debe trasladar los puntos azules que se encuentran en la casilla azul a la casilla verde, así, poder visualizar los puntos verdes y luego utilizar la herramienta "x" de desagrupación. Es decir, se espera que tome conciencia sobre el proceso de descomposición de la unidad de segundo orden.

*Figura 18 - Pregunta 3 al terminar la tarea de introducción-desagrupación nivel 1*



Con esta pregunta, se espera que el estudiante realice un primer acercamiento con la anticipación. Debe tener presente que si en una varilla hay  $n$  puntos verdes, la cantidad de puntos verdes que habrá en 4 varillas será  $4n$ .

## Nivel 2

Para el nivel 2 el estudiante debe ejecutar dos procesos de desagrupación para terminar la tarea. El primero, desplazar los puntos naranjas a la casilla azul y desagrupar los puntos azules. Luego desplazar los puntos azules a la casilla verde y desagrupar los puntos verdes de las varillas azules. Podemos observar que hay acciones equivalentes en el nivel 2, que ya fueron descritas en el nivel 1. En este apartado nos centraremos en aquellas intenciones y acciones que aún no han aparecido en la descripción de la interacción.

**Intención 1:** Traer los elementos de la casilla naranja hasta la casilla verde.

**Subintención 1.3:** mover los puntos naranjas a la casilla verde.

**Acción 1.3:** se arrastra un punto naranja hacia la casilla verde.

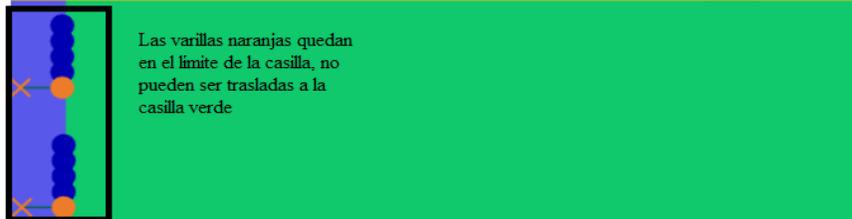
**Retroacción 1.3 (matemática):** el punto naranja, que se convierte en varilla en la casilla azul, se queda pegado en la frontera entre la casilla azul y verde.

*Figura 19 - Retroacción matemática posición de las varillas naranjas*

## Tarea 2

Lee detenidamente la tarea: Debes traer los elementos de los puntos naranjas a la casilla verde. Me ayudas, por favor. Cuando ya termines presiona "Terminar".

Terminar



Se espera que el estudiante interprete la retroacción del bloqueo de la posición, como un indicio para que abandone su acción de pasar los puntos a la fuerza y pruebe una estrategia nueva.

**Subintención 1.4:** mover los puntos de la casilla naranja a la casilla azul y desagruparlos.

**Subintención 1.4.1:** mover un punto naranja a la casilla azul.

**Acción 1.4.1:** el estudiante arrastra un punto naranja a la casilla azul,

**Retroacción 1.4.1 (matemática):** el punto naranja se convierte en una varilla naranja con una cantidad  $n$  de puntos azules iguales a la base.

Se espera que el estudiante, al poder visualizar los puntos que constituyen una varilla, interprete este hecho como coherente con el proceso de desagrupación, valide positivamente su acción y la refuerce.

**Subintención 1.4.2:** desagrupar los puntos azules de la varilla naranja

**Acción 1.4.2:** arrastrar un punto azul alejándolo de la varilla naranja.

**Retroacción 1.4.2 (matemática):** el punto azul queda pegado a la varilla naranja.

Se espera que el estudiante comprenda que no puede desagrupar los puntos de la varilla de manera individual, abandone la acción que ejecutó y pruebe una acción nueva.

**Acción 1.4.3:** hacer clic en la herramienta “x”.

**Retroacción 1.4.3** (*matemática*): los puntos se separan de la varilla naranja.

Se espera que el estudiante tome conciencia de la función que cumple la herramienta “x” para ejecutar y reforzar el proceso de desagrupación. A su vez, que entienda que independientemente de la varilla o casilla en la que se encuentre puede ejecutar esta acción cuando se quiera desagrupar los puntos de las varillas.

**Subintención 1.5:** mover una varilla naranja desagrupada a la casilla verde.

**Acción 1.5:** arrastrar una varilla naranja desagrupada hacia la casilla verde.

**Retroacción 1.5** (*matemática*): la varilla naranja queda pegada en la frontera entre la casilla azul y la verde.

Se espera que el estudiante comprenda que no se puede desplazar una varilla vacía hacia la casilla de la derecha. De manera que abandone la acción y pruebe una nueva.

### **Automatización de la gestión didáctica.**

Al igual que en el primer nivel, el estudiante comunica su decisión de dar por terminada la tarea oprimiendo el botón “Terminar”. Al hacer clic en el botón los posibles escenarios son:

1. Aún no se han realizado todas las agrupaciones posibles: se muestra el letrero “Aún no has terminado la tarea, lee bien la instrucción”.
2. Ya se han realizado todas las desagrupaciones posibles: se muestra una serie de preguntas que se solicita al estudiante responder en su cuaderno.

Las preguntas que se le proponen al terminar tienen el objetivo de hacerle tomar conciencia de sus acciones, de los resultados de esas acciones, y así dotar de sentido las agrupaciones que ha realizado.

***Pregunta 1: “¿Cuál fue el procedimiento que utilizaste para cumplir con la tarea?”***

Con esta pregunta, espera que el estudiante tome conciencia de que para poder llevar los puntos verdes de la casilla naranja a la casilla verde debe: pasar los puntos naranjas a la casilla azul y desagrupar los puntos azules de la casilla naranja. Luego pasar los puntos azules a la casilla verde y desagrupar los puntos verdes.

***Pregunta 2: “¿Cuántos puntos azules representa un punto naranja?”***

Con esta pregunta, se espera que el estudiante tome conciencia que en un punto naranja hay una cantidad  $n$  de puntos azules igual a la base, de la misma manera como en un punto azul hay  $n$  puntos verdes igual a la base.

***Pregunta 3: “¿Cuántos puntos verdes representa un punto naranja?”***

Con esta pregunta, se espera que el estudiante tome conciencia de que en un punto naranja hay  $n$  grupos de  $n$  puntos verdes, y por lo tanto, la cantidad de puntos verdes que hay en un punto naranja es  $n^2$ .

## **2. Tareas de exploración-anticipación**

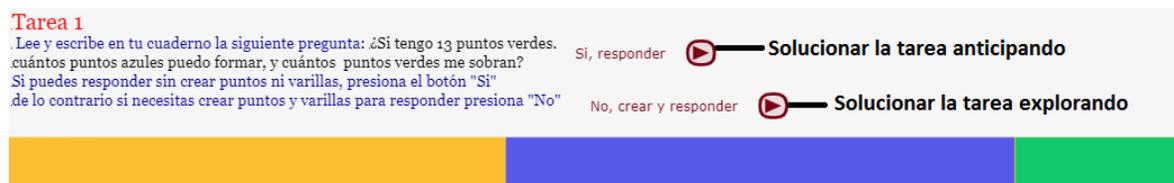
### **Inicio común**

Después de las tareas de introducción se presentan al estudiante las tareas de exploración y anticipación. Estos dos tipos de tarea sólo se diferencian por la manera

como el estudiante responde al enunciado, que es el mismo en los dos casos. Se considera tarea de exploración si el estudiante interactúa con el medio para encontrar la respuesta a la pregunta, y se considera tarea de anticipación si el estudiante responde la pregunta sin manipular el medio.

Por eso se presenta el enunciado y se pregunta al estudiante si puede responder sin usar puntos y varillas (anticipación) o no (exploración).

Figura 20 - Aspecto de las tareas de exploración-anticipación. Inicio común.



## 2.1. Agrupación

### 2.1.1. Etapa de exploración

#### 2.1.1.1. Descripción del medio

Si el estudiante oprime “No, crear y responder”, aparece la etapa de exploración. A continuación, presentamos un ejemplo:

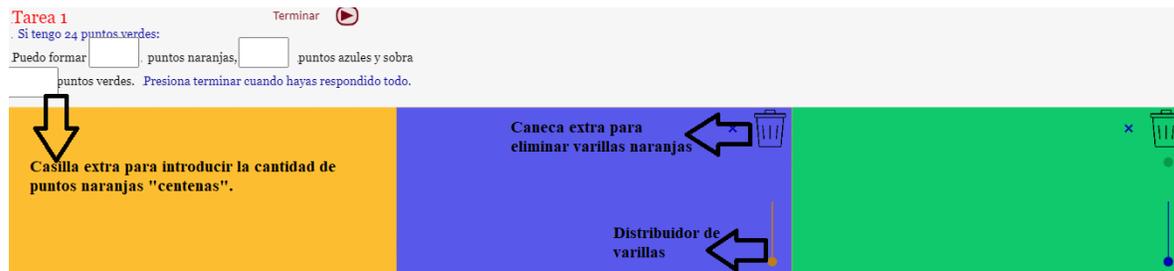
Figura 21 - Aspecto de la etapa de exploración nivel 1



Aparecen tres íconos en la parte superior derecha de la casilla verde: uno representa una caneca, uno representa un punto y el otro representa una varilla. A su vez el software presenta nuevamente el enunciado con unas casillas, en donde se debe insertar un valor numérico dando respuesta a la tarea.

En el nivel dos aparecen tres íconos más. El primero es un distribuidor de varillas naranjas para hacer las agrupaciones de las fichas azules en varillas naranja La caneca azul, que permite eliminar varillas naranjas y una casilla de entrada extra para colocar la cantidad de puntos naranjas.

Figura 22 - Aspecto de las tareas de exploración nivel 2



## 2.1.2. Etapa de anticipación

### 2.1.2.1. Descripción del medio

Ahora, si el estudiante oprime “Sí, responder”, está optando por realizar la tarea por anticipación. Para esta etapa, el software presenta únicamente las casillas para que el estudiante introduzca la cantidad que corresponde al número de puntos verdes que le indica la tarea. En esta etapa el estudiante no tendrá la oportunidad de crear elementos para contestar.

Figura 23 - Aspecto fase de anticipación nivel 1

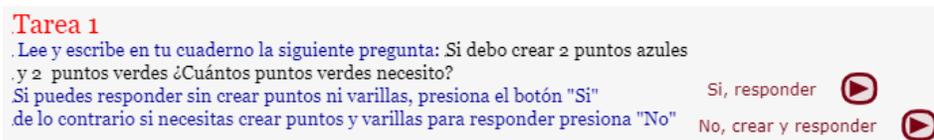


El nivel dos de las tareas de anticipación cuenta con una casilla extra para introducir la cantidad de puntos naranjas.

## 2.2.Desagrupación

Como en las tareas de agrupación se tiene un inicio común donde se presenta el enunciado de la tarea: “*Si debo crear 2 punto azules y 2 puntos verdes ¿Cuántos puntos verdes necesito?*” y los botones que le permiten resolverla por medio de la exploración o la anticipación.

Figura 24 Tarea de desagrupación



### 2.2.1. Etapa de exploración

#### 2.2.1.1. Descripción del medio

Al hacer clic sobre el botón “No, crear y responder” se presenta la etapa de exploración. Las tareas de desagrupación en esta etapa cuentan con los siguientes elementos:

- 1) La instrucción de la tarea, por ejemplo: Si debo crear 2 puntos azules y 2 puntos verdes. ¿Cuántos puntos verdes necesito?
- 2) Una casilla de entrada donde introduce la cantidad que corresponde a la respuesta de la tarea.
- 3) Distribuidores de puntos azules y distribuidores de puntos verdes.
- 4) Dos canecas que le permiten eliminar los elementos que no necesita.
- 5) Botón “Terminar”

*Figura 25 - Etapa de exploración desagrupación (nivel 1)*



Para el nivel 2 de las tareas de exploración se cuenta con un distribuidor de puntos naranjas que le permite crear los puntos de tercer orden “centenas”.

*Figura 26 - Etapa de exploración desagrupación (nivel 2)*



## **2.2.2. Etapa de anticipación**

### **2.2.2.1. Descripción del medio**

La etapa de anticipación cuenta con la instrucción de la tarea las casillas para introducir las cantidades para responder a la tarea y un botón “Terminar”.

Figura 27 - Etapa de anticipación desarupación (nivel 1)



Para el nivel dos no hay elementos adicionales, el único cambio es la instrucción.

### 2.2.2.2. Análisis a-priori

El propósito de las tareas de exploración-anticipación es producir un aprendizaje por adaptación, en el cual el estudiante identifica invariantes en sus acciones y en las retroacciones del medio, invariantes que le permiten interiorizar la acción (realizar las operaciones de agrupación/desagrupación sin recurrir al medio material propuesto - ya sea mentalmente o recurriendo a otras representaciones materiales) de manera que es capaz de predecir el estado del medio después de aplicar las operaciones de agrupación/desagrupación, es decir calcular el número de fichas de cada color.

Si el estudiante responde la pregunta sin haber manipulado el medio material, se considera una tarea de anticipación: se espera que el estudiante haya puesto en juego una estrategia desarrollada anteriormente (en las tareas de exploración o en las tareas de introducción) para dar respuesta a la pregunta. En otras palabras, al interactuar con el medio material, el estudiante construye conocimientos (nuevos para él), que luego utiliza para anticipar la respuesta a la pregunta (sin manipular el medio material).

Para tener éxito en las tareas de anticipación, es necesario que el estudiante haya construido una estrategia de anticipación (interiorización de las operaciones de

agrupación/desagrupación). En cambio, para tener éxito en las tareas de exploración, no es necesario que construya esas estrategias; basta con realizar las operaciones de agrupación/desagrupación manipulando el medio material propuesto.

Es la dialéctica de la exploración/anticipación la que promueve la producción de nuevos conocimientos. La manipulación del medio no garantiza por sí sola la construcción de estrategias de anticipación (interiorización de las operaciones); solo la toma de conciencia sobre la necesidad de la anticipación permite esta construcción durante la ejecución de las tareas de exploración. Por otra parte, el enfrentar las tareas de anticipación no garantiza que el estudiante tenga a disposición estrategias para tener éxito; se necesita la interacción con el medio material para construir esas estrategias.

El ir y venir entre tareas de exploración y tareas de anticipación promueve en el estudiante la búsqueda y puesta a prueba de estrategias que le permitan responder sin manipular el medio material (ya sea porque se ha construido una regla de cálculo, o porque el estudiante es capaz de representar mentalmente la manipulación del medio). En este apartado no presentamos un análisis detallado de la interacción sujeto-medio. Dicha interacción es igual a la analizada en las tareas de introducción; es decir, durante la exploración se siguen reforzando los aprendizajes por adaptación que permiten realizar agrupaciones y desagrupaciones en el medio material.

El elemento de diseño que activa la dialéctica entre exploración y anticipación corresponde a una automatización de la gestión didáctica. El ejercicio comienza planteando una pregunta de agrupación o desagrupación, y planteando la alternativa de

responder manipulando el medio material (exploración) o sin manipular el medio material (anticipación).

- Si el estudiante realiza cinco ejercicios de exploración, el sistema bloquea la posibilidad de exploración en el sexto ejercicio, para que el estudiante se enfrente a la necesidad de anticipar. De esta manera, se espera que el estudiante tome conciencia de la necesidad de construir una estrategia para calcular las agrupaciones/desagrupaciones.

Presentamos una situación del nivel 1 de agrupación en la que el estudiante ha resuelto cinco tareas por medio de la exploración e intenta resolver la tarea seis explorando:

*Figura 28 - Automatización de la gestión didáctica - bloqueo de la fase de exploración*



En la figura 21 se puede observar que el estudiante se encuentra ante el escenario donde debe decidir si va a resolver la tarea por medio de la exploración o por medio de la anticipación. Cuando el estudiante hace clic en “No, crear y responder”, emerge el letrero: “Ya has explorado el juego. Es hora de contestar sin crear elementos en la

pantalla. Responde la tarea”, se bloquea la posibilidad de contestar la tarea por medio de la exploración (no se pueden crear puntos, ni varillas). Se espera que el estudiante emplee una estrategia para responder la tarea por medio de la anticipación.

- Si el estudiante decide anticipar, una vez que responde las preguntas el sistema le solicita realizar una verificación experimental: manipular el medio para comprobar si su respuesta es correcta o no. De esta manera el estudiante está en capacidad de validar/invalidar no solo su respuesta, sino su estrategia de cálculo.

Figura 29 - Etapa de verificación 1



En la figura 22 podemos observar que cuando el estudiante ingresa la respuesta en la fase de anticipación y luego hace clic en “Terminar”, aparece la primera parte de la etapa de verificación que cuenta con:

- 1) La respuesta que proporcionó el estudiante.
- 2) Los elementos necesarios (puntos y varillas) para agrupar/desagrupar y cumplir con la tarea.
- 3) La instrucción de hacer las agrupaciones/desagrupaciones con los elementos.
- 4) Un botón “Terminado” que permite que el estudiante comunique que ya ha terminado.

En esta etapa, si el estudiante hace clic en el botón “Terminado” sin hacer todas las agrupaciones/desagrupaciones posibles, emerge un letrero que le indica que Aún no ha realizado todas las agrupaciones/desagrupaciones posibles.

Por otro lado, si el estudiante realiza todas las agrupaciones/desagrupaciones y hace clic en el botón “Terminado”, aparece la segunda parte de la verificación:

*Figura 30 - Contraste entre la respuesta previa y las agrupaciones*



Se muestra al estudiante una pregunta: “¿La respuesta que colocaste corresponde a los puntos en la pantalla? Responde con los botones “Si” o “No””. Se espera que el estudiante confronte su respuesta previa con la cantidad de puntos que resultaron en la pantalla, de manera que, si es equivalente el número de puntos en la pantalla con su respuesta, haga clic en, “Si” y refuerce la estrategia que ha utilizado para anticipar. De lo

contrario, si no corresponden las cantidades de la respuesta del estudiante y los puntos en la pantalla, haga clic en “No”. En este último caso, se da la posibilidad de responder la tarea con base en los puntos de la pantalla. Se espera que el estudiante invalide la estrategia que utilizó en la tarea actual y construya una nueva para resolver la siguiente tarea.

- Si el estudiante decide anticipar y responde erróneamente cinco ejercicios, el sistema le presenta el mensaje “Has terminado. Sin embargo, la estrategia utilizada no ha funcionado para resolver las tareas. Por favor reinicia la figura e inténtalo de nuevo. Recuerda que puedes explorar para contestar”:

*Figura 31 - Letrero emergente después de contestar cinco tareas erróneamente*



Se espera que el estudiante retome o inicie los ejercicios de exploración (o revise los registros de los ejercicios) con el objetivo de construir y/o verificar una estrategia de cálculo.

- Finalmente, si el estudiante responde correctamente cinco ejercicios de anticipación se considera que ha construido una estrategia de cálculo correcta y se da por finalizada la secuencia.

*Figura 32 - Letrero emergente cuando ha contestado cinco tareas correctamente*



En este caso se da la posibilidad de avanzar de nivel. El siguiente nivel incrementa la dificultad, propone tareas que involucran unidades de primer, segundo y tercer orden.

## Capítulo 6

### Análisis a-posteriori del pilotaje

El pilotaje se llevó a cabo con dos parejas (A y B) de estudiantes de cuarto grado de los colegios Gimnasio Campestre Marie Curie (pareja A) y Colegio Santa Ana de Fontibón (pareja B). La pareja A está integrada por dos estudiantes a quienes denominaremos E1 y E2 y los estudiantes de la pareja B los denominaremos E3 y E4. Para la interacción cada pareja contaba con un computador. Se realizó el pilotaje en un espacio fuera de la clase dentro de las instituciones.

Las dos parejas desarrollaron las tareas en orden: introducción y exploración-anticipación. Primero realizaron las tareas en base 4 y luego las tareas en base 10, con el fin de evaluar la pertinencia que tiene el trabajo en diferentes bases en pro de mejorar las competencias del estudiante cuando entra en contacto con el sistema de numeración posicional decimal.

La pareja A desarrolló las tareas en base 4 en dos sesiones de 2 horas cada una. Resolvieron las tareas de introducción, agrupación y desagrupación (exploración-anticipación). Por otro lado, desarrollaron las tareas de base 10 en dos sesiones más de 1 hora y media cada una. Resolvieron únicamente las tareas de agrupación y desagrupación (exploración-anticipación). La pareja B desarrolló las tareas en base 4 en 3 sesiones de dos horas cada una. Resolvieron las tareas de introducción, agrupación y desagrupación (exploración-anticipación). Por otro lado, desarrollaron las tareas de base 10 en 2 sesiones, una de 2 horas y otra de 1 hora. Resolvieron tareas de introducción, agrupación y desagrupación (exploración-anticipación).

## **1. Análisis tareas de introducción base 4**

En este apartado presentamos la síntesis del conjunto de acciones que realizaron los estudiantes de la pareja A en las tareas. La descripción completa de la interacción se encuentra en los anexos capítulo 1: Tareas de introducción.

**Nota: Realizamos una numeración por cada tarea y por cada línea en las tablas de los anexos donde se describe la interacción. Para referirnos a las acciones de los estudiantes en el análisis, la síntesis y las interpretaciones utilizamos los números de las líneas.**

### **1.1. Agrupación nivel 1**

#### **1.1.1. Pareja A:**

**1.1.1.1 Tarea de introducción (Agrupación nivel 1): Debes pasar los puntos verdes a la casilla azul: Aparecen siete puntos verdes y una varilla azul.**

#### **Síntesis de la interacción**

Los estudiantes comienzan intentando pasar un punto directamente a la casilla azul (línea N°5). Cuando ven que no es posible, deciden pasar la varilla (línea N°5). Al leer el letrero, caen en cuenta que a ese objeto se le llama ‘varilla’ “*¡ah! entonces esto es una varilla*” (línea N°6). Luego descubren que un punto puede pegarse a la varilla e intentan pasar la varilla con un punto (línea N° 6). Vuelven a leer el letrero y llenan la varilla, pero hay puntos que quedan fuera de la varilla (líneas N°7-14). Vacían la varilla y la llenan con los puntos que estaban fuera (líneas N°19-24). Quieren pasar todos los puntos, y primero piensan que deben duplicar la varilla “*¡Ah!, bueno, sí, pero miremos primero si podemos duplicar todo esto*” (línea N°27); luego piensan que pueden pasar la

varilla llena y vaciarla en la casilla azul para devolverse a recoger los puntos que faltan *“tocaría ponerle todos los puntos y luego zafarlo cuando esté en el azul [...] Ah, cuando esté en el azul ya zafarlo, darle en la “x” y después entonces pasarlo”* (línea N° 30 y 31). Finalmente deciden terminar la tarea dejando tres puntos en la casilla verde (línea N° 32).

Al terminar con la tarea y presionar el botón “Terminar”, los estudiantes responden dos de las tres preguntas que se presentan al final de la tarea, debido a que hacen doble clic en la primera pregunta, lo que impide leer el letrero y pasan de inmediato a la segunda pregunta. En la parte final del análisis sobre las tareas de introducción nivel 1 exponemos las respuestas a las preguntas y sus respectivas interpretaciones.

### **1.1.2. Pareja B:**

#### **1.1.2.1. Tareas de introducción (agrupación nivel 1): Aparecen 5 puntos verdes y**

##### **1 varilla azul.**

#### **Síntesis de la interacción**

El estudiante E3 inmediatamente selecciona un punto y lo arrastran hacia la varilla, se dan cuenta que el punto queda pegado a la varilla y repiten la misma acción con los demás puntos y llenan la varilla (línea N°2-5). Intentan pegar el quinto punto a la varilla, pero lo rechaza, repiten la acción dos veces (línea N°6 y 8). Como no queda pegado abandonan la acción e intentan pasar el punto de manera individual a la casilla azul (línea N°10), el punto queda en la frontera entre la casilla azul y verde y aparece el letrero que les indica que no se puede pasar el punto si no está agrupado (línea N°11).

Abandonan la acción de pasar el punto. Seleccionan la varilla llena y la pasan a la casilla azul (línea N°12). Luego los estudiantes afirman que no se puede hacer nada más porque el punto no se puede agrupar en la varilla. Presionan el botón “Terminar”.

### **Aprendizaje por adaptación:**

De acuerdo a las descripciones podemos afirmar que los estudiantes de las parejas A y B tuvieron los siguientes aprendizajes relativos a la relación entre las varillas y los puntos.

- En una varilla azul no cabe un número de puntos verdes mayor a la base: La pareja A en las líneas 30-32 y la pareja B en las líneas 6-10 intentaron agrupar una cantidad de puntos mayor a la base, y luego de la retroacción de rechazo abandonaron esa acción. Ambas parejas decidieron oprimir el botón Terminar aun cuando tenían puntos verdes en la casilla verde. Además, la pareja B escribió como respuesta a la primera pregunta “No pudimos pasar todos los puntos verdes porque nos quedaba uno, lo poníamos en la línea dónde se encontraban los otros, pero lo movíamos y se salía” (la pareja A pasó por alto esta pregunta).

Concluimos que las retroacciones matemáticas programadas promovieron este aprendizaje como se había previsto en el análisis a priori.

- Los puntos no pueden ser pasados de manera individual. La pareja A en la línea 5 y la pareja B en las líneas 11-14 intentan pasar un punto verde a la casilla azul, y después de constatar que el punto no pasa y leer el letrero emergente, deciden abandonar esa acción. La pareja A manifiesta la necesidad de una varilla extra

para pasar los puntos: “*si no están agrupados en una varilla...entonces debemos duplicar la varilla*” (línea N°18). Por otro lado, la pareja B afirma de manera verbal, después de agrupar los puntos en la varilla y pasarla a la casilla azul: “*no se puede hacer nada más porque el punto no se pega a los demás y no se puede pasar solo*” (línea N°14). Interpretamos las afirmaciones de los estudiantes como la toma de conciencia de la necesidad de agrupar los puntos para pasarlos a la siguiente casilla y que, por lo tanto, si no se pueden agrupar no se pueden pasar. Concluimos que las retroacciones matemáticas y didácticas programadas promovieron este aprendizaje como se había previsto en el análisis a priori.

- Al acercar un punto verde a una varilla no llena, se pega a la varilla. La pareja A en las líneas 10-12 y la pareja B en las líneas 2-5, cuando se dan cuenta que al acercar un punto a la varilla se pega, proceden a realizar esta misma acción con los demás puntos verdes. Aquí podemos afirmar que hay un refuerzo de la acción que corresponde al proceso de agrupación, tal como habíamos previsto en el análisis a priori.
- Si una varilla no está llena no se puede pasar la siguiente casilla. La pareja A en la línea 6 intenta pasar la varilla con un solo punto agrupado, aparece la retroacción matemática que ancla la posición de la varilla en la frontera entre la casilla azul y verde. Los estudiantes dicen “*!Ahj o sea varios puntos para que la tape*” (línea N° 11). Los estudiantes abandonan la acción y llenan la varilla antes de pasarla a la siguiente casilla. Este aprendizaje se produjo como se había previsto en el

análisis a priori. La pareja B no intentó pasar la varilla sin llenar a la siguiente casilla, por lo que no podemos afirmar que han realizado este aprendizaje.

- Si una varilla está llena se puede pasar a la siguiente casilla. En la pareja A, E1 llena la varilla y la pasa a la casilla azul (líneas N°13-14). al final de la tarea cuando se dan cuenta de que no pueden pasar todos los puntos, toman la varilla azul llena y la pasan a la casilla azul (línea N°32). Por otro lado, en la pareja B, E3 llena la varilla azul (línea N°12) y la pasa a la siguiente casilla. Estas acciones fueron previstas en el análisis a-priori.

Aunque no estaba previsto en el análisis a priori, la pareja A realizó acciones de desagrupación que condujeron a los siguientes aprendizajes:

- la x permite desagrupar: Es decir que al hacer clic en la herramienta “x” que posee cada una de las varillas, es posible desagrupar los puntos que han sido agrupados previamente (líneas N°30-32).

### **Respuestas a las preguntas:**

Pregunta 1: ¿Por qué no pudiste pasar todos los puntos?

Pareja A: No dicen nada al respecto.

Pareja B: “Porque todos los puntos no cabían en la línea en donde tocaba poner los puntos”

Interpretamos que hubo conciencia de que hay un límite de puntos que se pueden agrupar en una varilla para ser pasados a la siguiente casilla.

Pregunta 2: ¿Cuántos puntos pudiste pasar?

Pareja A: “4 y uno azul”

Pareja B: “5 puntos”

La pareja A aclara que pudo pasar 4 y uno adicional que lo cuentan como punto dentro de la casilla azul. La pareja B cuenta todos los puntos como si fueran de la misma naturaleza. Esto puede deberse a la forma en la que se plantea la pregunta. Es decir, la respuesta no necesariamente significa que no tomaron conciencia de que solo se pueden pasar 4 puntos verdes, debido a que tienen solo una varilla.

Pregunta 3: ¿Dónde están los puntos que pasaste?

Pareja A: “En la varilla”

Pareja B: No dicen nada al respecto.

Se puede afirmar que los estudiantes de la pareja A son conscientes de la constitución de un punto azul a partir de puntos verdes.

Por último, se puede concluir que las tareas de introducción (agrupación) nivel uno, cumplieron con su objetivo: Reconocer las relaciones de los elementos del medio gracias a las retroacciones matemáticas y didácticas, lo que genera aprendizaje por adaptación en los estudiantes, que se manifiesta en el refuerzo y abandono de las acciones para cumplir con la tarea.

## **1.2.Agrupación nivel 2**

### **1.2.1. Pareja A**

#### **1.2.1.1.Tareas de introducción: Aparecen 16 puntos verdes, 4 varillas azules y 1 varilla naranja.**

### **Síntesis de la interacción**

E1 acerca la varilla naranja que se encuentra en la casilla azul hacia la casilla verde, la varilla queda pegada a la frontera entre la casilla azul y la verde (líneas N°1-3). Sin embargo, la varilla queda inclinada hacia la casilla verde. E1 intenta pegar los puntos verdes en la varilla naranja (línea N°7). Al ver que no es posible, abandonan la acción y retoman la acción de agrupar puntos verdes en las varillas azules para luego pasarlos a la casilla azul (línea N°12). Convertidas las varillas azules en puntos, toman un punto azul y lo pegan en la varilla naranja (líneas N°13-14), al ver que funciona proceden a pegar los demás puntos en la varilla naranja (línea N°16). Por último, arrastran la varilla naranja a la casilla naranja y terminan la tarea (líneas N°18-20).

### **1.2.2. Pareja B:**

#### **1.2.2.1. Tareas de introducción: Aparece 17 puntos verdes, 4 varillas azules y 1 varilla naranja.**

#### **Síntesis de la interacción**

E4 arrastra cuatro puntos verdes hacia una de las varillas azules y llena la varilla (línea N°2). Repiten la misma acción hasta que todas las varillas azules quedan llenas (líneas N°3-5). Después de llenar todas las varillas azules, los estudiantes seleccionan la varilla naranja intentando pasarla a la casilla verde (línea N°6). Al ver que no es posible pasar la varilla naranja, abandonan la acción, alejando la varilla de la frontera (línea N°9). Luego los estudiantes seleccionan una varilla azul llena y la arrastran a la casilla naranja, el punto azul queda anclado en la frontera entre la casilla naranja y la casilla azul (líneas N°9 y N°11). Abandonan la acción anterior, y arrastran los puntos azules hacia la varilla

naranja, y la llenan (línea N°13). Por último, arrastran la varilla naranja hacia la casilla naranja y terminan la tarea (líneas N°14-15).

### **Aprendizajes por adaptación:**

- Un punto azul no puede pasar de manera individual a la casilla naranja. En las líneas 9-12 la pareja B intenta pasar un punto azul a la casilla naranja, pero la retroacción matemática ancla el punto a la frontera entre la casilla naranja y azul. Adicionalmente, aparece la retroacción didáctica del letrero emergente que indica que no es posible pasar los puntos a la siguiente casilla si no están agrupados: *“No se puede porque mira, dice que tienen que estar agrupados, es como lo que hicimos antes”* (línea N°12). En este momento la pareja B abandona la acción y procede a agrupar los puntos azules en la varilla naranja para pasarlos a la siguiente casilla (líneas N°13-15). Por otro lado, la pareja A no intenta pasar los puntos azules de manera individual a la casilla naranja, los agrupa en la varilla naranja y luego arrastra la varilla hacia la casilla naranja (líneas N°16-20). Concluimos que las retroacciones matemáticas y didácticas programadas promovieron este aprendizaje como se había previsto en el análisis a priori.
- En una varilla naranja se pueden agrupar la misma cantidad de puntos que en una varilla azul. La pareja A afirman que se debe hacer el mismo procedimiento que hicieron con la varilla azul: *“Sería hacer lo mismo con estas [...] pongamos 4 puntos”* (línea N°12). La pareja B, a pesar de que no afirman nada sobre la cantidad de puntos, (líneas N°13-14) sí agrupan 4 puntos azules en la varilla naranja para poderlos pasar a la casilla naranja, y no intentan pegar más puntos.

Interpretamos que las parejas son conscientes de la equivalencia de elementos que constituyen una varilla. Concluimos que las retroacciones matemáticas programadas promovieron este aprendizaje como se había previsto en el análisis a priori.

- En una varilla naranja no se pueden agrupar puntos verdes a menos que los puntos estén agrupados en una varilla azul. La pareja A (líneas N°5-9) y la pareja B (líneas N°6-8), intentan pasar la varilla naranja a la casilla verde, aparece la retroacción matemática que ancla la posición de la varilla en la frontera entre la casilla azul y la casilla verde. La pareja A intenta pegar los puntos verdes a la parte inclinada de la varilla naranja que está en la casilla verde (línea N° 9). Luego arrastran la varilla naranja hacia la casilla naranja pero los puntos verdes no se quedan pegados a la varilla naranja. Es importante resaltar que la acción anterior no se tenía prevista en el análisis a-priori, sin embargo, gracias a las retroacciones matemáticas asociadas a la posición de la varilla naranja las parejas A y B abandonan las acciones de pasar la varilla naranja a la casilla verde y de agrupar los puntos verdes en la varilla naranja y proceden a probar una nueva acción. Ambas parejas agrupan los puntos verdes en las varillas azules para pasarlos a la casilla azul, agruparlos en la varilla naranja y por último pasarlos a la casilla naranja (Pareja A líneas N°18-19, Pareja B líneas N°13-14). Interpretamos que las retroacciones programadas en el software tuvieron el efecto esperado puesto que se refuerzan acciones válidas para resolver la tarea y se abandonan las acciones que no funcionan para resolver la tarea.

- Por otro lado, no hubo intentos de pasar varillas incompletas a la siguiente casilla. Lo interpretamos como una muestra del abandono de una acción como consecuencia de que se ha interiorizado la idea de concretar grupos para formar una unidad de un orden superior.

### **Respuestas a las preguntas**

Pregunta 1: ¿Cuántos puntos verdes pudiste pasar a la casilla naranja?

Pareja A: “16 puntos”

Pareja B: “Pudimos pasar 16 puntos”

En la pareja A, E1 realiza una afirmación sobre la cantidad de puntos verdes haciendo una multiplicación: “*cuatro... por cuatro puntos... dieciséis puntos creo*” (línea 23). Por otro lado, en la pareja B, E4 afirma: “*en uno azul caben cuatro verdes, en dos ocho, en tres doce, y en cuatro dieciséis*” (línea N°17).

De acuerdo con las acciones y afirmaciones de los estudiantes podemos observar que hay estrategias de conteo como la suma reiterada y la multiplicación para determinar la cantidad de puntos verdes que constituyen un punto naranja. Estos procedimientos de cálculo equivalen a formas de representar las acciones de agrupación de primero y segundo nivel sin utilizar el medio material, y constituyen un primer acercamiento a la estrategia de solución que se necesita para resolver las tareas de exploración-anticipación.

Pregunta 2: ¿Por qué no pudiste pasar todos los puntos verdes pero los azules sí?

Pareja A: No dicen nada al respecto. (Hacen dos veces clic en el letrero anterior por lo que no se muestra la última pregunta)

Pareja B: “Porque habían cuatro varillas y en cada varilla cabían cuatro puntos”

La pareja B hace alusión a la cantidad de varillas concretas y la imposibilidad de agrupar más puntos en las varillas. Podemos interpretar la respuesta como una forma de constatar que hay un límite de puntos que pueden ser agrupados de acuerdo a la cantidad de varillas.

Pregunta 3: ¿Dónde están los puntos verdes y los puntos azules?

Pareja A: “Los azules en la varilla naranja y los verdes dentro de los azules”

Pareja B: No dicen nada al respecto. (Hacen dos veces clic en el letrero anterior por lo que no se muestra la última pregunta)

En la respuesta de la pareja A se puede observar que hay conciencia de la naturaleza constitutiva entre los puntos. Un punto azul está constituido por puntos verdes y a su vez un punto naranja se constituye de puntos azules. Sin embargo, no hay evidencia de que dadas las constituciones que se mencionaron, los puntos verdes se encuentran en el punto naranja.

### **1.3.Análisis tareas de introducción (desagrupación nivel 1-base 4)**

#### **1.3.1. Pareja A:**

##### **1.3.1.1.Tareas de introducción: Aparecen 2 puntos azules.**

#### **Síntesis de la interacción:**

Los estudiantes entienden rápidamente qué deben hacer en la tarea, interpretando correctamente el enunciado; esto se debe a que en el ejercicio de agrupación ya habían realizado acciones de desagrupación, y habían aprendido a utilizar la x de una varilla para desagrupar los puntos verdes. Proceden a arrastrar los dos puntos azules a la casilla verde,

y luego oprimen la x en cada varilla. Con todos los puntos verdes desagrupados hacen clic en terminar y responden las preguntas.

### **1.3.2. Pareja B:**

#### **1.3.2.1. Tareas de introducción (desagrupación) Nivel 1: Aparece un punto azul**

##### **Síntesis de la interacción:**

E3 arrastra el punto azul a la casilla verde (línea N° 2), luego seleccionan los puntos que están agrupados en la varilla e intenta separarlos seleccionando el punto y arrastrando (línea N° 3). Después de intentar hacer clic en diferentes elementos, (línea N° 3) hace clic en la herramienta “x”, allí se dan cuenta que la herramienta funciona para desagrupar los puntos de la varilla. Por último, los estudiantes dispersan los puntos desagrupados y hacen clic en el botón “Terminar”.

##### **Aprendizajes por adaptación:**

Dentro de la interacción de las parejas con el primer nivel de desagrupación, se identificaron dos aprendizajes concretos:

- Los puntos no se pueden separar de la varilla a la fuerza. La pareja B en la línea 3 arrastra el punto azul de la casilla azul a la casilla verde e intenta varias veces separar uno de los puntos verdes a la fuerza, allí aparece una retroacción matemática: los puntos pegados a la varilla no pueden separarse arrastrándose fuera de la varilla. Después de varios intentos abandonan la acción de arrastrar un punto verde. Posterior a ello intenta por otros medios desagrupar los puntos. Por otro lado, la pareja A no realizó ninguna acción inválida de desagrupación, dado que el aprendizaje correspondiente a la desagrupación lo habían alcanzado al

realizar las tareas de agrupación. En las líneas 4-5 se observa el refuerzo de las acciones de desagrupación: arrastrar cada uno de los puntos azules a la casilla verde y hacer clic sobre la x.

- Los puntos se desagrupan de las varillas cuando se oprime la herramienta “x” de desagrupación. La pareja B después de su intento de separar los puntos de la varilla a la fuerza, hacen clic en la herramienta y se dan cuenta que es posible desagrupar los puntos cuando se hace uso de la “x”: “*ah ya*” (línea N° 4).

Se pudo identificar en la interacción, que los estudiantes reconocieron los elementos que permiten desagrupar los puntos de las varillas. Concluimos que las retroacciones matemáticas y didácticas programadas promovieron este aprendizaje como se había previsto en el análisis a priori.

### **Respuestas a las preguntas:**

Pregunta 1: ¿Cuántos puntos verdes tiene una varilla?

Pareja A: “Cuatro”

Pareja B: “Cuatro”

De acuerdo con la respuesta, interpretamos que hay plena conciencia de la cantidad de puntos verdes que constituyen un punto azul. Se muestra un indicio del reconocimiento del cardinal de la base que se trabaja.

Pregunta 2: ¿Qué tuviste que hacer para dejar los puntos en la casilla verde?

Pareja A: “Arrastrarlos y presionar la x”

Pareja B: “Llevar el punto azul a la verde y presionar la x”

En las respuestas podemos observar que la concepción creada sobre la acción de desagrupar está constituida por dos sub-acciones, la primera desplazar el punto hacia la casilla de la izquierda para que aparezca la varilla con la x para poder desagrupar, y la segunda hacer uso de la herramienta “x” para poder desagruparlos. Interpretamos que ambas parejas son conscientes del significado de la desagrupación.

Pregunta 3 ¿Cuántos puntos verdes hay en 4 puntos azules?

Pareja A: “4”

Pareja B: “dieciséis puntos”

En la pareja B, E3 realiza una afirmación sobre la respuesta que ha escrito: “*uno azul son cuatro, dos son ocho, tres doce y cuatro dieciséis*” (línea N°8) podemos identificar en su respuesta que aparece de nuevo la idea de colección ya que al ser consciente de la cantidad de puntos verdes que tiene un punto azul puede predecir la cantidad de puntos que constituye una cantidad mayor de puntos azules. Interpretamos este hecho como una estrategia que puede utilizar para anticipar en las siguientes tareas. Por otro lado, la pareja A al parecer no comprende la pregunta. Sin embargo, interpretamos que su respuesta “4” puede hacer referencia a la cantidad de puntos verdes que puede haber en cada uno de los cuatro puntos azules, es decir el mismo número de puntos verdes.

## **1.4.Desagrupación nivel 2**

### **1.4.1. Pareja A:**

#### **1.4.1.1.Tareas de introducción [Aparecen 3 puntos naranjas en la pantalla]**

En la tarea de segundo nivel se presentó una situación que no permitió desarrollar de manera fluida la tarea. La pareja A comenzó a resolver la tarea, pero en un momento de la interacción se bloquearon los elementos en la pantalla debido a que se superponían una con otra las herramientas x, lo cual afectó el proceso de desagrupación. La pareja A tuvo que reiniciar el ejercicio para poder resolverlo satisfactoriamente. La descripción que presentamos se divide en dos momentos: antes del percance y después del mismo cuando se reinició el ejercicio.

### **Síntesis de la interacción:**

La pareja arrastra el punto naranja hacia la casilla verde con el fin de cumplir con la tarea, la varilla naranja queda pegada en la frontera entre la casilla azul y la verde y aparecen todas las varillas azules y los puntos verdes pegados (línea N°1). Intentan despegar los puntos verdes de las varillas azules que se encuentran pegadas a la varilla naranja utilizando la herramienta “x” pero no lo consiguen ya que están superpuestas (líneas N°5-6). Se reinicia el nivel (por intervención del docente).

En el segundo intento El uno de los puntos naranjas hacia la casilla azul y desagrupa los puntos azules haciendo uso de la herramienta “x” (línea N°9). Enseguida arrastra otros tres puntos naranjas hacia la casilla azul y los acerca a la frontera (pero sin tocarla) entre la casilla azul y la verde (línea N°11). Hace clic en las “x” de las varillas naranjas, se desagrupan los puntos azules (línea N°11). Pasa los puntos azules a la casilla verde (línea N°13-14). Por último, ordena las varillas azules en la casilla verde para luego desagrupar los puntos verdes de cada una de las varillas y terminar con la tarea (líneas N°21- 23).

## **1.4.2. Pareja B:**

### **1.4.2.1. Tareas de introducción (desagrupación) Nivel 2: Aparece 1 punto**

#### **naranja**

#### **Síntesis de la interacción:**

En la pareja B, E4 arrastra el punto naranja a la casilla verde e intenta pasarlo a la fuerza, pero el punto queda anclado en la frontera de las casillas azul y verde (línea N°2). La pareja aleja la varilla naranja de la frontera e intenta separar los puntos azules que están agrupados en la varilla naranja a la fuerza (línea N°2). E4 dice: *“¡Ah! ya me acordé”* (línea N°2) hace clic en la herramienta “x”, desagrupa los puntos azules. Al desagrupar los puntos azules E3 intenta pasar a la fuerza la varilla naranja, la cual queda anclada en la frontera de la casilla azul y verde sin poder ser pasada (línea N°3). E4 arrastra un punto azul hacia la varilla naranja y lo pega (línea N°4), luego arrastra la varilla naranja hacia la casilla verde, la varilla queda anclada en la frontera (línea N°4), leen de nuevo la indicación, hacen clic en la herramienta “x” desagrupando el punto que habían pegado y pasan los puntos azules a la casilla verde (línea N°5). Al pasar los puntos azules, E4 lleva el cursor al botón “Terminar”, aparece el letrero emergente: *“Aún no has terminado la tarea, lee bien la instrucción”* (línea N°8). E3 hace clic en ok y se comparten el mouse para hacer clic en la herramienta “x” de cada varilla azul, desagrupan todos los puntos verdes. Por último, dirigen el cursor al botón “Terminar”.

#### **Aprendizajes por adaptación**

En la interacción con el segundo nivel identificamos cuatro aprendizajes:

- Las varillas naranjas no pueden ser pasadas a la casilla verde. La pareja A en las líneas 1-2 y la pareja B en las líneas 1-2 intentan pasar a la fuerza la varilla naranja hacia la casilla verde. Lo impide la retroacción matemática que ancla la posición de la varilla naranja en la frontera entre la casilla azul y la casilla verde. Esta acción no había sido prevista en el análisis a priori; sin embargo, gracias a la retroacción matemática, las parejas abandonan esta acción. Cabe aclarar que la pareja A muestra evidencia del aprendizaje en el segundo intento que tuvo para resolver la tarea.

Es necesario hacer dos observaciones: en primer lugar, el enunciado pide llevar los elementos a la casilla verde, provocando un intento de pasar la varilla naranja a la casilla verde. En segundo lugar, aunque la retroacción matemática impide que la varilla naranja pase a la casilla verde, no impide que aparezcan las varillas azules con los puntos verdes cuando la varilla naranja está en la frontera entre las casillas azul y verde, lo cual induce a los estudiantes a intentar desagrupar las varillas azules sin haber primero desagrupado la varilla naranja. En el diseño no se previó la acción que ejecutaron las estudiantes de la pareja A, el poder visualizar las varillas azules cuando se acerca la varilla naranja a la casilla verde puede confundir al estudiante. Es necesario impedir que aparezcan las varillas azules si aún no han sido desagrupadas de la varilla naranja. En futuras implementaciones es necesario reflexionar mejor sobre el enunciado de la tarea y evitar que la varilla naranja llegue a la frontera entre las dos casillas, de manera que no aparezcan las varillas azules cuando aún no han sido desagrupadas de la varilla naranja.

- Para llevar los elementos de la casilla naranja a la casilla verde es necesario hacer dos desagrupaciones. Para cumplir con el objetivo de la tarea las dos parejas A y B tuvieron que pasar los puntos naranjas a la casilla azul, desagrupar los puntos azules y luego pasarlos a la casilla verde para luego desagrupar los puntos verdes de las varillas azules. Para el caso de la pareja B podemos identificar este procedimiento en las líneas 2, 5 y 6, 10-12. Para el caso de la pareja A podemos identificar este procedimiento en las líneas 9-14 y 19-22. En este hecho los estudiantes pueden identificar la característica constitutiva de grupos de grupos que hay en una unidad de tercer orden “centenas”.
- Los puntos azules no se pueden pasar a la casilla verde si están agrupados en una varilla naranja. La pareja A en la línea 2 y la pareja B en la línea 2 intentan pasar la varilla naranja con puntos azules agrupados. Interpretamos este hecho como una manera de llevar todos los elementos a la casilla verde (como lo indica la tarea). Sin embargo, después de la retroacción matemática que bloquea la posición de la varilla naranja, los estudiantes abandonan la acción y proceden a desagrupar los puntos azules para luego pasarlos a la casilla verde. Concluimos que las retroacciones matemáticas y didácticas programadas promovieron este aprendizaje como se había previsto en el análisis a priori.
- La tarea se termina cuando todos los puntos verdes quedan desagrupados. La pareja B en las líneas 8-9, intenta terminar la tarea sin haber desagrupado los puntos verdes de las varillas azules. Aparece la retroacción didáctica del letrero emergente que le indica que no ha terminado la tarea y que debe leer de nuevo la

instrucción. Enseguida desagrupan los puntos verdes con la herramienta “x” para cumplir con la tarea. Concluimos que las retroacciones didácticas programadas promovieron este aprendizaje como se había previsto en el análisis a priori.

**Respuestas a las preguntas:**

Pregunta 1: ¿Cuáles fueron los procedimientos que utilizaste para cumplir con la tarea?

Pareja A: *“Pasarlos a la casilla azul, darle en la “x” y desagruparlos”*

Pareja B: *“Pasar el punto naranja a la casilla azul y luego pasar los puntos azules a la casilla verde, quitándolos de las varillas”*

En las respuestas podemos identificar el proceso de desagrupación intermedio que sucede en la casilla azul. Ambas parejas manifiestan la necesidad de desagrupar los puntos azules de la varilla naranja para poder pasarlos a la casilla verde y cumplir con la tarea. Sin embargo, no se manifiestan sobre la necesidad de volver a desagrupar los puntos verdes de cada una de las varillas que han pasado. Interpretamos que las acciones de las parejas se concentraron en la desagrupación de los puntos azules dado que la dificultad más importante que tuvieron que superar fue el hecho de separar los puntos de la varilla para luego tener la posibilidad de pasar a la casilla verde todos los elementos.

Pregunta 2: ¿Cuántos puntos azules representa un punto naranja?

Pareja A: *“4”*

Pareja B: *“cuatro”*

Interpretamos que ambas parejas son conscientes de que en un punto naranja hay cuatro puntos azules. Sin embargo, en la respuesta no hay evidencia de que sean

conscientes de que hay una relación entre la cantidad de puntos azules que constituyen un punto naranja y la cantidad de puntos que constituyen un punto azul.

Pregunta 3: ¿Cuántos puntos verdes representa un punto naranja?

Pareja A: “16”

Pareja B: No dicen nada al respecto.

En la pareja A, E2 realiza una afirmación sobre la respuesta: “*Eh...mmm... cuatro por cuatro, dieciséis*” (línea N°34). De acuerdo a la respuesta podemos identificar de nuevo una estrategia de conteo mediante la multiplicación, que la pareja A utiliza para responder a la pregunta y además se muestra como una estrategia que les permite anticipar.

## **2. Análisis tareas de exploración- anticipación**

En este apartado presentamos el conjunto de acciones que realizaron los estudiantes de las parejas A y B en las tareas.

Para efectos de orden en la descripción y análisis, separamos las tareas. Es decir, analizaremos tarea por tarea, de acuerdo a las acciones que ejecutaron las estudiantes. En total se desarrollaron cinco tareas en este primer nivel. Terminada cada una de las tareas transcritas hay una síntesis e interpretación parcial de la interacción. Al finalizar todas las tareas hay un análisis global en el cual nos pronunciamos sobre la automatización de la gestión didáctica.

### **2.1.Agrupación nivel 1 (base 4)**

#### **2.1.1. Pareja A: Tareas de exploración- anticipación (agrupación): Nivel 1**

##### **2.1.1.1.Tarea 1: 7 puntos verdes**

#### **Síntesis de la interacción:**

E1 realiza la lectura de la tarea e inmediatamente E2 realiza una afirmación sobre la posible respuesta, “*Entonces ahí sería como un punto azul...*” (línea N° 2). Sobre la afirmación, podemos interpretar que el estudiante comprende que un punto azul representa una unidad de segundo orden que está compuesta por 4 unidades de primer orden, lo cual le permite hacer afirmaciones de manera acertada sobre la respuesta a la tarea.

Continúa la interacción, E1 interrumpe a E2 y aclara que deben terminar de leer la tarea. Terminada la lectura, deciden resolver la tarea por medio de la anticipación y hace clic en “Si, responder”. E2 realiza la siguiente afirmación “*Puedo formar un punto*”

(línea N° 6). E1 complementa la respuesta y afirma que sobran 4 puntos verdes, E2 lo corrige y afirma que sobrarían 3 (línea N° 8). En la corrección que hace E2, podemos observar que el estudiante entiende que hay 3 puntos que no pueden agruparse para formar un punto azul y que, por lo tanto, quedan como elementos unitarios (puntos verdes individuales).

Introducen las cantidades 1 y 3 respectivamente en las casillas de respuesta y terminan la tarea (líneas N°9-10). Aparece la etapa de verificación, E1 hace lectura de la instrucción (línea N°11) y E2 procede a realizar las agrupaciones de los puntos verdes en la varilla azul (línea N°12). Hechas las agrupaciones, pero sin pasar la varilla a la casilla azul, E2 hace clic en “Terminado” (línea N°14). Aparece la retroacción didáctica en forma de letrero emergente que le indica que aún no ha terminado (línea N°14). E2 lee el mensaje y procede a arrastrar la varilla llena a la casilla azul para luego hacer clic en “Terminado” (línea N°14). Observamos en esta última acción el efecto positivo que tuvo la retroacción didáctica del letrero. Cuando el estudiante lee la información, inmediatamente comprende que hace falta algo en el proceso de agrupación, y procede a arrastrar la varilla azul para cumplir con la instrucción y terminar con la tarea.

Aparece la pregunta en la que confronta su respuesta con los puntos en la pantalla. Confirman que la respuesta es correcta. E2 afirma, “*Sí, porque sería uno y tres*” (línea N° 16).

#### **2.1.1.2.Tarea 2: 9 puntos verdes**

##### **Síntesis de la interacción:**

E1 hace la lectura de la tarea e inmediatamente E2 procede a hacer clic sobre “Sí, responder”. Se presenta la etapa de anticipación y E2 realiza una afirmación sobre la

posible respuesta, “*Entonces serían lo mismo, entonces, 9 puntos verdes, serían 2 porque ...2 azules serían 8 ...y sobraría 1*” (líneas N° 2-4-6). Sobre la respuesta de E2, podemos observar que retoma la estrategia que utiliza en la primera tarea. El estudiante sabe que con 8 puntos verdes pueden formar 2 puntos azules y, como son 9 puntos verdes, sobraría un elemento unitario (un punto verde). Podemos interpretar que hay conciencia sobre la constitución de los grupos de primer nivel que poseen una base específica en este caso 4.

E2 introduce las cantidades en las casillas y termina la tarea (línea N°6). Aparece la etapa de verificación, E2 realiza las agrupaciones de los puntos en las varillas (línea N°6). Luego procede a pasar las varillas a la siguiente casilla (aquí podemos ver que se refuerza la acción corregida en la tarea 1) (línea N°6). Terminan las agrupaciones y aparece la pregunta que confronta la respuesta que dieron con los puntos en la pantalla (línea N°6). La pareja responde “Sí” confirmando que hay correspondencia entre la respuesta que proporcionaron y los puntos en la pantalla. Se termina la tarea.

### **2.1.1.3. Tarea 3: 14 puntos verdes**

#### **Síntesis de la interacción**

E2 lee parcialmente la tarea. E1 dice “*4 de los azules porque 4 por 4 serían*” (línea N°2), E2 responde “*¡16! Serían 3, y sobrarían 2*” (línea N°3). En la afirmación de la pareja podemos identificar una estrategia multiplicativa para resolver las tareas. En la respuesta de E2 podemos observar que hay conciencia sobre la cantidad de puntos que presenta la tarea (14 puntos verdes) y que, por lo tanto, 16 excede esa cantidad; al decir que serían 3, interpretamos que la estudiante hace referencia a que se forman 3 grupos (3

puntos azules), es decir 12 puntos verdes, y sobran 2 (puntos verdes) ya que son 14 puntos verdes.

E2 introduce las cantidades 3 y 2 en las casillas de respuesta (línea N°5). Termina la tarea y aparece la etapa de verificación (línea N°5). E2 realiza las agrupaciones de los puntos en las varillas (línea N°5). Luego pasa las varillas a la siguiente casilla y hace clic en “Terminado” (línea N°7). Aparece la pregunta que confronta la respuesta de la pareja, con los puntos en la pantalla, hacen clic en “Si”, confirmando la correspondencia entre la respuesta que dieron y los puntos en la pantalla. Se termina la tarea.

#### **2.1.1.4.Tarea 4: 10 puntos verdes**

##### **Síntesis de la interacción**

E2 hace la lectura parcial de la tarea (sin embargo, no lo hace en voz alta) luego dice: *“Entonces serían, si son 10 serían 2 y sobrarían 2”* (línea N°3). Interpretamos que, teniendo en cuenta la cantidad, hace las operaciones de forma mental y proporciona la respuesta. Cuando dice *“serían 2”* interpretamos que hace referencia a la cantidad de puntos azules, y cuando dice *“sobrarían 2”* interpretamos que hace referencia a la cantidad de puntos verdes. En efecto, la respuesta es correcta.

En la pareja A, E2 procede a introducir en las casillas la respuesta 2 puntos azules y 2 puntos verdes respectivamente (línea N°3). Hace clic en el botón “Terminar”, aparece la etapa de verificación (línea N°3). E2 procede realizar las agrupaciones de los puntos verdes en las varillas y luego las pasa a la casilla azul (línea N°3). Hace clic en el botón “Terminado”. Confronta la respuesta que dieron previamente con la cantidad de puntos en la pantalla y responden haciendo clic en “Si” (línea N°5). Se termina la tarea.

### **2.1.1.5.Tarea 5: 12 puntos verdes**

#### **Síntesis de la interacción:**

E1 hace lectura de la tarea. hace clic en el botón “Si, responder”. Aparece la etapa de anticipación, y afirma, “*Puedo formar... 4 por 3... doce... 3 puntos y no sobra ninguno*” (línea N°5), introduce el número 3 en la primera casilla y el 0 en la segunda (línea N°5). En la respuesta que proporciona E1 podemos observar de nuevo la estrategia multiplicativa que utiliza para responder a la tarea. Multiplica “4 por 3”, como son 4 elementos por grupo, multiplica por 3 grupos y obtiene la cantidad de puntos verdes iniciales (12 puntos verdes), lo que confirma su respuesta. Es interesante que afirme que no sobra ninguno, y que además lo consigne en la casilla de respuesta como cero, esto demuestra la conciencia del símbolo que se utiliza en caso de tener que representar la ausencia de cantidad.

Después de introducir las cantidades en las casillas de entrada, E1 hace clic en “Terminar”, aparece la etapa de verificación (línea N°5). Procede realizar las agrupaciones de los puntos verdes en las varillas y luego las pasa a la casilla azul (línea N°7). Hace clic en el botón “Terminado”. Confronta la respuesta que dieron previamente con la cantidad de puntos en la pantalla y responden haciendo clic en “Si” (línea N°13). Se termina la tarea.

#### **Análisis global: Automatización de la gestión didáctica.**

- La pareja toma la decisión de anticipar inmediatamente resuelve correctamente los 5 ejercicios. Podemos interpretar este hecho como muestra de que ya hay una estrategia construida para resolver las tareas. En las tareas 5, 3 y 2, realizan una multiplicación para poder llegar a la respuesta. Casualmente son tareas en las que

había más de 8 puntos verdes, es decir, donde se forman 2 grupos (puntos azules) o más. La estrategia que utiliza la pareja A consiste en nombrar múltiplos de 4, de manera que la cantidad no exceda el número de puntos que presenta la tarea. Luego, la diferencia entre el múltiplo de 4 y la tarea corresponde a la cantidad de puntos verdes que sobran. El múltiplo de 4 corresponde a los puntos azules y la diferencia a la cantidad de puntos verdes.

- Se realiza una evaluación sobre las cinco tareas que se anticiparon: En este primer escenario de interacción con las tareas de exploración-anticipación no hizo falta la etapa de exploración para crear una estrategia que les permitiera responder la tarea. Se hace la hipótesis de que las tareas de introducción fueron suficientes para asociar la agrupación de puntos en las varillas con la multiplicación, lo cual constituye una estrategia de anticipación. La pareja A resolvió cada una de las cinco tareas correctamente y aparece la retroacción didáctica del letrado que les indica de manera concreta que la estrategia que utilizaron funcionó y que pueden avanzar. Dada la evaluación, el software le permite avanzar al siguiente nivel (línea N° 13 tarea 5).
- La etapa de verificación reforzó de manera efectiva la estrategia de la pareja. Esta etapa cumplió dos funciones. La primera, constatar que la respuesta que proporcionó la pareja es correcta y por tanto, la estrategia que utilizaron fue la adecuada. Y la segunda, ofreció un referente concreto que les permitió consolidar el concepto de agrupación en las tareas. Se dieron cuenta que el proceso de agrupación se compone de dos momentos, el primero cuando se agrupan puntos

en una varilla y el segundo, cuando se pasa esa varilla llena a la siguiente casilla de manera que quede creada una unidad de orden superior. En dos ocasiones, la pareja A se limitó a agrupar los puntos en las varillas. Sin embargo, cuando terminaban la tarea aparecía la retroacción didáctica del letrado que les indicaba que aún no habían terminado y que debían revisar. En este momento la retroacción surtió un efecto positivo puesto que en las dos ocasiones los estudiantes completaron eficientemente el proceso de agrupación.

En conclusión, la gestión didáctica automatizada tuvo el efecto previsto en el análisis a priori. Para esta pareja, la dialéctica exploración/anticipación se produjo entre los ejercicios de introducción y los ejercicios de anticipación. Durante los ejercicios de introducción construyeron una estrategia que les permite anticipar, y utilizaron esa estrategia de manera correcta en los ejercicios de anticipación, resolviendo de manera correcta cinco ejercicios.

### **2.1.2. Pareja B: Tareas de exploración- anticipación (agrupación): Nivel 1**

#### **2.1.2.1.Tarea 1: 11 puntos verdes**

#### **Síntesis e interpretación de la interacción**

E4 realiza la lectura de la primera tarea y E3 procede a hacer clic en el botón “Si, responder” (línea N°2). Al aparecer la fase de anticipación E4 lee el enunciado para completar las casillas y E3 (sin consultarle a E4) procede a ingresar los dígitos 3 y 0 (línea N°4). Dirige el cursor al botón “Terminar” y hace clic (línea N°4). Hacemos la hipótesis que E3 aplica de manera incorrecta la estrategia multiplicativa, calculando  $3 \times 4 = 11$ .

Aparece la etapa de verificación, E4 agrupa cuatro puntos verdes en una varilla azul, luego E3 otros cuatro puntos en otra varilla azul. E3 arrastra cada una de las varillas azules a la casilla azul y por último, E4 lleva el cursor al botón “Terminar” y hace clic (líneas N° 7-9). Aparece la pregunta en la que confrontan su respuesta con los puntos en la pantalla. E4 lee el enunciado y E3 lleva el cursor al botón “No” y hace clic (línea N°11). Podemos observar que la pareja verifica que la cantidad ingresada en las casillas no corresponde a las agrupaciones pertinentes.

El medio presenta el letrero emergente que les indica que ahora deben contestar la respuesta correcta en las casillas, por lo que la pareja oprime el botón “ok”. E4 ingresa en las casillas el número 2 en la cantidad de puntos azules y 3 en la cantidad de puntos verdes que sobran (línea N°12). En esta última acción podemos observar una muestra del efecto positivo que tuvo la etapa de verificación. Al mostrar los elementos correctos en la pantalla, permite que la pareja tome conciencia de que su respuesta no fue correcta. Por último, la pareja lleva el cursor al botón “Terminar” y aparece el letrero emergente que invita a escribir la respuesta en el cuaderno y a continuar con la siguiente tarea.

#### **2.1.2.2.Tarea 2: 15 puntos verdes,**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción**

E3 lee el enunciado de la tarea, luego lleva el cursor al botón “No, crear y responder” y hace clic (línea N°1). Podemos interpretar que la pareja, dada la interacción con la primera tarea, toma la decisión de responder la tarea por medio de la exploración, es decir, haciendo uso de los elementos (puntos y varillas). Se dan cuenta de que no

pueden responder al azar y que aún no tienen una estrategia concreta para responder por medio de la anticipación.

E3 procede a crear los quince puntos verdes y cuatro varillas. E4 hace clic en el distribuidor de varillas azules y crea 4 varillas azules, arrastra 4 puntos verdes a una de las varillas azules. Luego E3 agrupa 8 puntos verdes en 2 varillas azules. E4 agrupa en la cuarta varilla azul 3 puntos verdes (una varilla queda con tres puntos verdes). El hecho de crear 4 varillas como se puede observar en la línea 3 podemos interpretarlo como un acto de anticipación relativo a la comprensión de cantidad de elementos que deben crearse de acuerdo a una base que en este caso es 4. Podemos identificar un reconocimiento de la invariante base en esta acción.

E4 arrastra la varilla con tres puntos agrupados hacia la casilla azul (línea N°5). El medio bloquea la posición de la varilla en la frontera de la casilla verde y azul (retroacción matemática). Aparece el letrero que indica que las varillas no pueden ser pasadas a la siguiente casilla si no están agrupadas (retroacción didáctica). E3 lee el letrero, aleja la varilla de la frontera y pasa una por una las varillas que están totalmente agrupadas (línea N° 6).

El estudiante E4 dice *“no se pueden pasar los quince puntos, entonces podemos decir que podemos formar tres varillas azules, perdón tres puntos azules y no se puede pasar esta varilla de tres puntos verdes, porque si le ponemos un punto más y la pasamos, nos pasamos, por lo que sobran esos tres”* (línea N°7). E3 dirige el cursor a las casillas, ingresa el número 3 en la cantidad de puntos azules y 3 en la cantidad de puntos verdes que sobran (línea N°8). Lleva el cursor en el botón “Terminar” y hace clic,

aparece el letrero emergente que invita a escribir la respuesta en el cuaderno y a continuar con la siguiente tarea.

### **2.1.2.3.Tarea 3: 10 puntos verdes,**

#### **Síntesis e interpretación de la interacción**

E4 procede a leer el enunciado de la tarea, lleva el cursor al botón “No, crear y responder” y hace clic. E3 dice “*cuatro por dos ocho, pasa, y dos, diez*” señala la pantalla y hace un movimiento con la mano desde la casilla verde a la casilla azul (línea N°2). Podemos interpretar que el estudiante es consciente de la agrupación total de una varilla, por lo que implementa una estrategia multiplicativa que afirma que en dos varillas azules se tienen ocho puntos verdes y que estos se pueden pasar a la casilla azul. Además, es consciente de que sobran dos puntos verdes para completar el total de diez. Ingresa en la casilla (sin consultar a E4) el número 2 en la cantidad de puntos azules y 2 en la cantidad de puntos verdes que sobran (es decir, aunque toman la decisión de explorar, realizan acciones relativas a la anticipación), lleva el cursor al botón “Terminar” y hace clic (línea N°2). Podemos observar que el estudiante no crea puntos ni varillas para solucionar la tarea, pero anticipa correctamente.

Al hacer clic en “Terminar”, aparecen los elementos necesarios y el letrero que les solicita hacer las agrupaciones pertinentes para verificar la respuesta. E4 agrupa cuatro puntos verdes en una varilla azul y otros cuatro puntos verdes en la segunda varilla azul. Selecciona cada varilla y las arrastra una por una a la casilla azul (línea N°3). E3 dice “*La respuesta sí coincide con los puntos*” dirige el cursor al botón “Si” y hace clic (línea N°4). Podemos identificar que el estudiante verifica que su estrategia es adecuada para la

solución de la tarea. Por último, aparece el letrero emergente que invita a escribir la respuesta en el cuaderno y a continuar con la siguiente tarea.

#### **2.1.2.4.Tarea 4: 9 puntos verdes,**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción**

E3 lee el enunciado de la tarea, lleva el cursor al botón “Si, responder”, hace clic y le pasa el ratón a E4 (línea N°1). E4 dice *“Se forman 2 puntos azules por que en cada varilla se pueden pegar solo cuatro puntos y cuatro más cuatro ocho, se pasarían y para que sean nueve puntos queda uno en la casilla verde”* (línea N°2). Se puede observar una estrategia aditiva para representar las agrupaciones; el estudiante es consciente de la totalidad de puntos que pueden ser agrupados en una varilla y suma de cuatro en cuatro... Ingresar el número 2 en la cantidad de puntos azules y 1 en la cantidad de puntos verdes que sobran. Dirige el cursor al botón “Terminar” y hace clic (línea N°2).

Al hacer clic “Terminar” aparecen los elementos necesarios y el letrero de verificación que indica si la respuesta que colocaron corresponde a los puntos de la pantalla. E3 agrupa los puntos verdes en las dos varillas azules (línea N° 3). E4 arrastra las varillas una por una a la casilla azul. Luego dirige el cursor al botón “Si” y hace clic (línea N°4). Se puede observar que el estudiante verifica que su estrategia es adecuada para la solución de la tarea. Aparece el letrero emergente que invita a escribir la respuesta en el cuaderno y a continuar con la siguiente tarea.

#### **2.1.2.5.Tarea 5: 8 puntos verdes,**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción**

E4 hace lectura de la tarea y dirigen el cursor al botón “Si, responder” y hacen clic (línea N° 1). Aparece la etapa de anticipación, E4 ingresa el número 2 en la cantidad de puntos azules y 0 en la cantidad de puntos verdes que sobran (línea N°1). E4 lleva el cursor al botón “Terminar” y hace clic (línea N°2). Se puede interpretar que la pareja ya tiene una estrategia de anticipación.

Al hacer clic en “Terminar” aparecen los elementos necesarios y el letrero de verificación que indica si la respuesta que colocaron corresponde a los puntos de la pantalla. E3 agrupa los puntos verdes en las dos varillas, luego las arrastra una por una a la casilla azul (línea N° 2). E4 lleva el cursor al botón “Si” y hace clic. Aparece el letrero emergente que invita a escribir la respuesta en el cuaderno y a continuar con la siguiente tarea.

#### **2.1.2.6.Tarea 6: 13 puntos verdes,**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción**

E3 hace lectura de la tarea y lleva el cursor al botón “Si, responder” y hace clic (línea N°1). E3 dice “*Cuatro por tres doce y sobra uno*”. Ingresa el número 3 en la cantidad de puntos azules y 1 en la cantidad de puntos verdes que sobran (línea N°1). E4 dice “*Estoy de acuerdo*” (línea N°1 y N°2). A diferencia de los ejercicios anteriores, esta es una evidencia de una estrategia multiplicativa para anticipar.

E3 lleva el cursor al botón “Terminar” y aparecen los elementos necesarios, pero a la vez aparece un letrero emergente que indica que han terminado, que la estrategia que han utilizado para realizar las tareas ha sido satisfactoria. y que pueden avanzar a la siguiente figura.

### **Análisis global: Automatización de la gestión didáctica.**

- *Anticipar sin una estrategia clara:* La pareja toma la decisión de anticipar inmediatamente, pero su estrategia es incorrecta. Al ingresar los dígitos no correspondientes en las casillas y hacer clic en “Terminar”, el medio les permite avanzar a la etapa de verificación (Tarea 1). Etapa que les permite invalidar su respuesta. Efecto posterior: ejercicio de exploración.
- *Conciencia del proceso de agrupación:* Esto se puede observar, en la etapa de verificación experimental, cuando aparecen los elementos necesarios para desarrollar la tarea por exploración y hacer las debidas agrupaciones. Los estudiantes pueden ver un contraste, entre la respuesta dada por anticipación y la respuesta que se obtiene por exploración. Al verificar que no hay correspondencia entre las respuestas, el medio presenta una retroacción didáctica, que lo invita a contestar la respuesta correcta en las casillas (línea N°12. Tarea 1). La pareja contesta correctamente, continúan con la siguiente tarea con la decisión de explorar (línea N°1. Tarea 2). Concluimos que la pareja toma conciencia del proceso de agrupación de la tarea y deciden abandonar la estrategia para crear otra con ayuda de la exploración.
- *La etapa de exploración permite crear una estrategia para poder anticipar:* Los estudiantes al realizar la tarea 2 por exploración, toman conciencia de la constitución de los puntos azules. Esto permite que los estudiantes refuercen el proceso de agrupación, pero a su vez crean una estrategia de anticipación. Se puede observar cuando la pareja decide explorar en la tarea 3 pero dan solución

sin crear elementos (anticipan), implementan una estrategia aditiva adecuada para su solución (línea N°2. Tarea 3). Y en la tarea 4 la pareja decide anticipar e implementan una estrategia multiplicativa.

- *Interiorización de estrategias de primer orden:* Se puede observar en la tarea 5 cuando la pareja sin necesidad de comunicarse, toman la decisión de anticipar y escriben los dígitos para la solución correcta (línea N°1. Tarea 5). Podemos interpretar que los estudiantes ya realizan la estrategia aditiva o multiplicativa mentalmente. A su vez hacen un proceso de agrupación de elementos unitarios para la construcción de una unidad de orden superior y un reconocimiento de las colecciones de grupos. Por lo que se concluye que hay una interiorización de unas estrategias de primer orden.

En conclusión, la gestión automática de la secuencia tuvo el efecto previsto: la verificación experimental de la respuesta permitió invalidar, luego los estudiantes realizaron una exploración que les permitió construir una estrategia de anticipación (primero aditiva, luego multiplicativa). La dialéctica exploración/anticipación les permitió construir una estrategia para anticipar.

## **2.2.Agrupación nivel 2**

### **2.2.1. Pareja A: Tareas de exploración- anticipación:**

#### **2.2.1.1.Tarea 1: 29 puntos verdes**

## **Síntesis e interpretación de la interacción**

E2 hace lectura de la tarea y escribe en el cuaderno la pregunta (línea N°2). E2 realiza una afirmación sobre la tarea haciendo alusión al múltiplo de 4 que se acerca más

a 29 en este caso 28 (línea N° 3). Observamos de nuevo la estrategia asociada a la constitución de grupos. Luego afirma que serían 7 puntos azules y que le sobraría 1 punto verde (línea N° 7). Introduce las cantidades en las casillas: 1 punto verde, 7 puntos azules. Podemos observar que la pareja no realiza las agrupaciones de los puntos azules para construir el punto naranja.

Luego E2 realiza una afirmación sobre la cantidad de puntos naranjas *“y de los naranjas serían 1, ¿cierto?”* (línea N° 7). Interpretamos que afirma que solo puede construirse un punto naranja dado que para construir dos, necesitarían al menos 8 puntos azules *“y no alcanzaría a formar el otro”* (línea N° 13). Aquí podemos observar que hay conciencia de la constitución del punto naranja con base en los puntos azules, pero consideran las dos agrupaciones por separado, sin combinarlas. Introduce el número 1 en la casilla de puntos naranjas, luego procede a hacer clic en el botón “Terminar”. Aparece la etapa de verificación. E2 proceden a realizar todas las agrupaciones posibles (línea N°9), queda un punto naranja en la casilla naranja, tres puntos azules en la casilla azul y un punto verde en la casilla verde. Arrastra el cursor hacia el botón “Terminado” y hace clic. Aparece la pregunta que confronta la respuesta que proporcionaron con los puntos en la pantalla. La estudiante E2 se apresura a presionar “Si”, sin embargo, aparece el letrero emergente que le indica que debe revisar los puntos y las casillas. La pareja vuelve a realizar el conteo de los puntos en la pantalla y se dan cuenta que no corresponde con la respuesta que dieron (línea N° 18). La pareja corrige la respuesta y procede a hacer clic en “Terminar”. Contestan correctamente, por lo que se les permite avanzar a la siguiente tarea.

### **2.2.1.2.Tarea 2: 44 puntos verdes**

#### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E2 hace la lectura de la tarea y hace clic en el botón “Si, responder”. E1 realiza una afirmación sobre la tarea “44 dividido 4...” (línea N° 2). Observamos aquí una estrategia asociada a la división para llegar a la respuesta. E2 complementa la respuesta y afirma que serían 11, interpretamos que la respuesta hace referencia al resultado de la división que E1 propone (línea N°3). E1 dice que serían 11 puntos naranjas, pero E2 lo corrige y afirma que serían 2 puntos naranja, 3 puntos azules y sobrarían 0 puntos verdes (línea N° 5). Podemos interpretar en la respuesta que proporciona E2, que ya hay conciencia del doble proceso de agrupación que deben hacer para llegar a la respuesta. Sin embargo, E1 parece no integrar aún las dos agrupaciones. Primero se agrupan los puntos verdes y da como resultado 11 puntos azules, luego procede a agrupar los puntos azules en grupos de 4 (2 puntos naranjas) y a rectificar cuántos sobran (3 puntos azules).

E2 procede a hacer clic sobre el botón “Terminar”. Aparece la etapa de verificación. E2 realiza las agrupaciones correspondientes y pasa cada varilla completa a la siguiente casilla. Cabe aclarar que hubo dos momentos (líneas N° 9-10-11) en los que trató de pasar la varilla sin completar a la siguiente casilla. Sin embargo, la retroacción matemática del bloqueo de la posición de la varilla y la retroacción didáctica de la advertencia tuvieron el efecto esperado puesto que la estudiante corrigió su acción, completó las varillas y las pasó a la siguiente casilla, para tener entonces: 2 puntos naranja, 3 puntos azules y 0 puntos verdes. Al terminar las agrupaciones presiona el botón “Terminado”. Aparece la pregunta

que confronta la respuesta que proporcionaron con los puntos en la pantalla. En efecto se corresponden la respuesta y los puntos, por lo que contestan afirmativamente la pregunta y terminan la tarea.

### **2.2.1.3.Tarea 3: 55 puntos verdes**

#### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E1 hace la lectura de la tarea y dice *“entonces serían... serían 9... 11 por 5”* (línea N°1). Cuando E1 multiplica por 5 quiere decir que ahora realiza grupos de 5 puntos verdes. Sin embargo, la base que se trabaja es base 4 por lo que la estrategia es incorrecta. E2 interviene y le aclara que deben ser 4 puntos verdes por varilla (línea N°6). E1 cae en cuenta del error haciendo alusión a que lo que debe hacer es multiplicar por 4 (línea N°7). E2 afirma: *“Entonces sería por 13 que daría 52, entonces serían 13 puntos azules hasta ahora, eh... serían 3 puntos naranjas”* (línea N°10). En esta línea podemos observar que la estudiante realiza las agrupaciones de primer orden que dan como resultado 13 puntos azules y luego realiza las agrupaciones de segundo orden que dan como resultado 3 puntos naranjas. Afirma que sobra 1 punto azul que sobrarían 3 puntos verdes (línea N°10). Podemos identificar una estrategia ya construida que les permite responder eficientemente las tareas.

E2 introduce en las casillas de entrada: 3 puntos naranjas, 1 punto azul y 3 puntos verdes. Luego procede a hacer clic en el botón “Terminar”. Aparece la etapa de verificación. La pareja realiza todas las agrupaciones posibles y hace clic en el botón “Terminado”, allí aparece la pregunta que confronta la respuesta que proporcionaron las

estudiantes con los puntos en la pantalla. De acuerdo a las agrupaciones la respuesta que colocaron es correcta, por lo que se responde afirmativamente y se refuerza el uso de la estrategia para solucionar las siguientes tareas.

#### **2.2.1.4.Tarea 4: 51 puntos verdes**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E2 hace lectura de la tarea e inmediatamente hacen clic en “Si, responder”. y realiza una afirmación sobre la posible respuesta: “*Entonces eh...según las cuentas serían 3 naranjas...0 azules... y sobrarían... 48...49, 50, ... y 3 verdes.*” (línea N° 5). La estudiante hace referencia a “las cuentas”, lo que interpretamos como operaciones previas que ha realizado para cumplir con la tarea. Lo anterior se muestra en las líneas 10 y 11 donde enuncian el número 52 como referente para comenzar la resolución de la tarea (número que utilizaron en la tarea inmediatamente anterior). Sin embargo, el número 52 excede al número de la tarea actual por lo que utilizan el múltiplo de 4 anterior, el 48 (puntos verdes agrupados). Luego nombra la agrupación de segundo nivel: *serían por 48 que serían por 12 y ... 12 por... 4...4 por qué me da 12 sería por 3*. Por lo tanto, deducen que el número de puntos naranjas serían 3, que no quedan puntos azules y que sobrarían 3 puntos verdes (línea N° 11). En la respuesta podemos identificar de nuevo la estrategia asociada a las agrupaciones de primer y segundo orden mencionadas en la tarea 3, las cuales se llevan a cabo a través de multiplicaciones y acciones de reparto equitativo de las cantidades.

Posterior a las afirmaciones de los estudiantes sobre la posible respuesta, introducen las cantidades en las casillas. Colocan 3 en la casilla de puntos naranjas, 0 en la casilla de puntos azules y 3 en la casilla de puntos verdes. Luego proceden a hacer clic en “Terminar”, aparece la etapa de verificación. E2 se encarga de realizar las agrupaciones y contestar la pregunta que confronta la respuesta que dieron con los puntos en la pantalla. La respuesta corresponde con los puntos en la pantalla. La pareja responde “Si” y avanzan a la siguiente tarea.

#### **2.2.1.5.Tarea 5: 58 puntos verdes**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E1 realiza una afirmación de manera inmediata sobre la cantidad de puntos azules “*Serían 14*” (línea N°1). Luego procede a hacer clic sobre el botón “Si, responder”. E2 dice: “*Seguirían los 3 puntos naranjas...dos verdes*” (se introducen estas cantidades en las casillas) (línea N°4). Podemos identificar, de acuerdo a la forma en que responde, que utiliza la respuesta del ejercicio anterior, la respuesta sobre cantidad de puntos naranjas aparece casi de forma inmediata. E2 verbaliza el procedimiento que utiliza para saber cuántos puntos azules puede formar: “*Entonces sería volver a hacer la multiplicación, si por 13 eran 52 entonces eh... por 14 serían 56*” (línea N°6) posteriormente afirman que si lo multiplican por 15 se pasaría (líneas N°7 y N°8). Interpretamos que son conscientes del límite de grupos que pueden formar dada la cantidad de puntos. Las estudiantes reafirman la cantidad de puntos azules y naranjas que se forman (línea N° 13) e introducen la cantidad de puntos azules en la casilla de entrada respectiva.

La pareja hace clic en “Terminar”, aparece la etapa de verificación. E2 realiza todas las agrupaciones posibles y contesta la pregunta que confronta la respuesta que han colocado respecto a los puntos en la pantalla. Contestan que efectivamente hay correspondencia entre ellos. Termina la tarea y el nivel

### **Análisis global: Automatización de la gestión didáctica.**

- La validación experimental que se llevó a cabo después de realizar una tarea por medio de la anticipación permitió la toma de conciencia de la constitución de un punto azul a partir de 4 puntos verdes y a su vez la constitución de un punto naranja a partir de 4 puntos azules. En la interacción con la primera tarea podemos observar que hubo dificultades para responder por medio de la anticipación. La estrategia construida hasta el momento se concentraba en saber la cantidad de puntos azules que se forman, sin embargo, no había consciencia de la cantidad de puntos naranjas que los puntos azules podrían constituir y a su vez la cantidad de puntos azules que sobran después de agruparlos. La etapa de verificación funcionó como mecanismo de exploración que hizo que los estudiantes tomaran conciencia de las agrupaciones de primer orden, puntos verdes en varillas azules (creación de puntos azules) y las agrupaciones de segundo orden, puntos azules en varillas naranjas (creación de puntos naranjas). Podemos validar esta conjetura en las siguientes tareas, observamos en varias ocasiones que el estudiante (E2) se concentra en realizar dos procesos de agrupación para llegar a la respuesta, teniendo en cuenta la cantidad de puntos que

pueden ser agrupados y los que sobran en cada orden, mientras que El sigue sin calcular las agrupaciones de puntos azules.

- Al finalizar las tareas hubo un proceso de evaluación sobre el desempeño de los estudiantes durante las tareas. En este nivel las estudiantes contestaron erróneamente la primera tarea. Sin embargo, el software se programó para bloquear el siguiente nivel si se contestan dos o menos tareas correctamente. En este caso la pareja A respondió correctamente 4 tareas, lo que interpretamos como un indicio de que hay construida una estrategia y que puede avanzar a la siguiente fase, la desagrupación.
- Se refuerza una estrategia basada en la estructura multiplicativa. Hubo aprendizaje por adaptación asociado a la toma de conciencia de los dos procesos de agrupación que llevan a cabo en las tareas de nivel dos. El primero, agrupar “unidades” (puntos verdes) para formar “decenas” (puntos azules) y el segundo agrupar “decenas” (puntos azules) para formar “centenas” (puntos naranjas). Por tanto, se adapta una estrategia construida en el nivel uno, se incorpora el segundo proceso de agrupación, lo que da como resultado una estrategia adecuada de anticipación para el segundo nivel. El conteo con múltiplos de 4, la referencia a la multiplicación y a la división manifestados en el desarrollo de las tareas son signos de una representación mental de las operaciones de agrupación.

## **2.2.2. Pareja B: Tareas de exploración- anticipación**

### **2.2.2.1.Tarea 1: 17 puntos verdes**

#### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E4 hace lectura de la tarea y de inmediato hacen clic en “Sí, responder”. E3 y E4 afirman que cuatro puntos verdes es un punto azul (línea N°2 y línea N°3). Ingresan el número 4 en la casilla de los puntos naranja, el número 4 en la casilla de los puntos azules y el número 1 en la casilla de los puntos verdes que sobran. Luego dirigen el cursor al botón “Terminar” y hacen clic (línea N°4). Interpretamos esta acción, como una falta de conciencia de parte de los estudiantes, en las agrupaciones de segundo orden, es decir no tienen presente la parte constitutiva de un punto naranja. Los estudiantes sólo tienen en cuenta que un punto azul equivale a cuatro puntos verdes, un aprendizaje asociado al primer nivel. Luego tratan de utilizar ese conocimiento que construyeron en las tareas de nivel 1, e implementarlo en las tareas de nivel 2. Interpretamos que E3 plantea la operación  $4 \times 4 = 16$  y sobra un punto azul para diecisiete. Sin tener conciencia de que un punto naranja equivale a cuatro puntos azules y por lo tanto a dieciséis puntos verdes.

Aparecen los elementos necesarios (17 puntos verdes, 4 varillas azules y 1 varilla naranja) para que la pareja verifique su respuesta. Los estudiantes realizan las respectivas agrupaciones, arrastran las varillas que están totalmente agrupadas a la casilla de la derecha, dirigen el cursor al botón “No” y hacen clic (línea N°7). Se puede identificar que los estudiantes son conscientes que los puntos de la pantalla obtenidos en la etapa de verificación no corresponden a la respuesta que habían dado.

Aparece el letrero emergente que los invita a contestar la respuesta correcta en las casillas. E4 presiona ok, e ingresa el número 1 en la casilla de los puntos naranja, el número 0 en la casilla de los puntos azules y el número 1 en la casilla de los puntos verdes que sobran. E3 hace clic en el botón “Terminar”. Por último, aparece el aviso que invita a escribir la respuesta correcta en el cuaderno y pasar a la siguiente tarea.

#### **2.2.2.2.Tarea 2: 29 puntos verdes,**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E4 hace lectura de la tarea. E3 empieza a escribir en el cuaderno palitos a los que asigna un múltiplo de cuatro a cada uno. Por otro lado, E4 escribe en el cuaderno un grupo de cuatro del número cuatro, lo encierra y por otra parte un grupo de tres del número cuatro. E3 señala la pantalla y procede a ingresar el número 1 en la casilla de los puntos naranja, el número 7 en la casilla de los puntos azules y el número 1 en la casilla de los puntos verdes que sobran (línea N°4). Observamos de nuevo la estrategia asociada a la constitución de grupos de primer orden. Interpretamos que el estudiante hace alusión al múltiplo de 4 más cercano del 29 en este caso 28 y como falta un punto para completar el cardinal, entonces sobra un punto verde. Pero a la vez observamos que el estudiante es consciente de la agrupación de segundo orden, al encerrar los cuatro 4 y al colocar en la casilla un punto naranja. Tiene presente que un punto naranja equivale a cuatro puntos azules y por lo tanto a dieciséis puntos verdes. Aun así, no tiene en cuenta en ese momento, la resta de los cuatro puntos azules que serían agrupados en la varilla naranja.

El estudiante se percata que no restó los cuatro puntos azules que se agrupan en la varilla naranja para conformar el punto, borra el número 7 e ingresa el número 2 en la

casilla de los puntos azules (línea N°4). Pensamos que el estudiante cometió un error con la operación resta, al afirmar que siete puntos azules menos cuatro puntos azules es igual a dos. Lleva el cursor al botón “Terminar” y hace clic. Aparecen los elementos necesarios para que la pareja realice las respectivas agrupaciones. La pareja agrupa las varillas, las arrastran a la casilla de la derecha, dirigen el cursor al botón “No” y hacen clic.

Aparece el letrero emergente que los invita a contestar la respuesta correcta en las casillas. E4 presiona ok, e ingresa el número 1 en la casilla de los puntos naranja, el número 3 en la casilla de los puntos azules y el número 1 en la casilla de los puntos verdes que sobran. E3 hace clic en el botón “Terminar”. Por último, aparece el aviso que invita a escribir la respuesta correcta en el cuaderno y pasar a la siguiente tarea.

### **2.2.2.3.Tarea 3: 25 puntos verdes.**

#### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E4 procede a leer el enunciado, duda en la decisión y hace clic en el botón “No, crear y responder”. Aparecen los distribuidores para crear los elementos, la pareja realiza las agrupaciones de los puntos verdes en las varillas azules, arrastran las varillas azules agrupadas a la casilla azul. Luego agrupan los puntos azules en la varilla naranja y la arrastran a la casilla naranja. E4 dice “*se puede formar 1 punto naranja, 2 puntos azules y sobra 1 punto verde*”. Ingresa en la casilla de puntos naranja el número 1, en la casilla de puntos azules el número 2 y en la casilla de puntos verdes que sobran el número 3. La pareja lleva el cursor al botón “Terminar” y hace clic. Se puede observar que la pareja desarrolló la tarea netamente por exploración, sin intención alguna de llevar a cabo una estrategia para la solución de la tarea por anticipación.

#### **2.2.2.4.Tarea 4: 52 puntos verdes**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E3 procede a leer el enunciado de la tarea, luego dirige el cursor al botón “Si, responder” y hace clic. E3 escribe en el cuaderno los múltiplos de cuatro hasta el cincuenta y dos. E4 dice que cuatro puntos verdes es un punto azul y ocho puntos verdes son dos puntos azules. Representa los puntos azules como varillas debajo de cada múltiplo de cuatro. E3 afirma que cuatro líneas (puntos azules) es una varilla naranja (punto naranja), (línea N°3). Se puede interpretar que la pareja es consciente de las agrupaciones de primer orden y de segundo orden, al identificar que un punto naranja está conformado por cuatro puntos azules y por lo tanto dieciséis puntos verdes. Esta toma de conciencia, lleva a que los estudiantes planteen una estrategia de conteo. Se evidencia cuando el estudiante afirma que se pueden formar 3 puntos naranjas, 1 punto azul y no queda nada en la verde entonces sobran 0 puntos verdes (línea N°3).

E4 asienta con la cabeza, dirige el cursor al botón “Terminar” y hace clic. Aparecen los elementos necesarios para que la pareja realice las respectivas agrupaciones. La pareja agrupa los puntos verdes en las varillas azules, las arrastran a la casilla de la derecha donde se convierten en puntos azules, luego agrupan 12 puntos azules en tres varillas naranja y las arrastran a la casilla naranja donde se convierten en puntos naranja; afirman que ya entendieron (línea N°8), dirigen el cursor al botón “Si” y hacen clic. Se interpreta que los estudiantes tienen una interiorización de la estrategia, para desarrollar la tarea anticipando. Por último, aparece el letrero emergente, que indica

que está muy bien, lo invita a escribir la respuesta en el cuaderno y continuar con la siguiente tarea.

#### **2.2.2.5.Tarea 5: 36 puntos verdes,**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E3 lee de forma incompleta el enunciado, dirige el cursor al botón “Si, responder” y hace clic. E4 afirma que debe llegar hasta el múltiplo treinta y seis del número cuatro y señala el cuaderno. E3 dice que cuatro puntos verdes son un punto azul, ocho puntos verdes son dos puntos azules, doce puntos verdes son tres puntos azules dieciséis puntos verdes son cuatro puntos azules y por tanto es un punto naranja. Esto es una evidencia de que el estudiante implementa la estrategia asociada a la constitución de grupos de primer y segundo orden. De igual forma E4 al afirmar que cuatro puntos azules conforman un punto naranja.

E3 implementa una estrategia aditiva al tener conciencia de la constitución de un punto naranja. Lo anterior se puede interpretar a partir de la afirmación, “*dos, treinta y dos*”, refiriéndose a que dos puntos azules están conformados por treinta y dos puntos verdes. E3 dirige el cursor a las casillas e ingresa el número 2 en los puntos naranja, el número 1 en los puntos azules y el número 0 en los puntos verdes que sobran. Mira a E4 para saber si está de acuerdo con su respuesta, quien contesta que no sabe. E3 procede a explicarle que un punto naranja está conformado por dieciséis puntos verdes, entonces al sumar dos puntos naranjas serían treinta y dos (puntos verdes). Como son treinta y seis puntos verdes, faltarían cuatro puntos, pero esos conforman un punto azul. Se puede

identificar que la pareja interioriza la estrategia aditiva en relación con la constitución de grupos. E4 acepta la explicación, dirige el cursor al botón “Terminar” y hace clic.

Aparecen los elementos necesarios (36 puntos verdes, 9 varillas azules y dos varillas naranjas) para desarrollar la etapa de verificación. E3 le pide a E4 que por favor realice las agrupaciones. E4 desarrolla el proceso de agrupación afirmando que los puntos de la pantalla coinciden con la respuesta que dieron en un principio. Interpretamos este momento de verificación como un refuerzo de la estrategia. La pareja hace clic en el botón “Si” y aparece el letrero que invita a escribir la respuesta en el cuaderno y a continuar con la siguiente tarea.

#### **2.2.2.6.Tarea 6: 43 puntos verdes**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E4 lee incompleto el enunciado y hace clic en el botón “Si, responder”. E3 le pregunta a E4 si ya lo realizó, quien contesta: *“Pues dos naranjas son treinta y dos, si sumamos otra se pasa de cuarenta y tres, da cuarenta y ocho. Entonces serían dos naranjas, maaaas cuatro, daría treinta y seis, más otra daría cuarenta, entonces son dos puntos azules para dar cuarenta y no pasarse, y tres puntos verdes para cuarenta y tres”* (línea N°3). Con la anterior afirmación, podemos interpretar que la estrategia aditiva y constitutiva de grupos es interiorizada por los dos estudiantes. E3 ingresa el número 2 en la casilla de los puntos naranja, el número 2 en la casilla de los puntos azules y el número 3 en la casilla de los puntos verdes que sobran. Dirige el cursor al botón “Terminar” y hace clic. Aparecen los elementos necesarios (43 puntos verdes, 10 varillas azules y dos varillas naranjas) para verificar la respuesta, pero a la vez aparece el letrero que les

informa que la estrategia que han utilizado para realizar las tareas ha sido satisfactoria.

Los invita a abrir la siguiente figura.

### **Análisis global: Automatización de la gestión didáctica.**

- *Abandono de estrategias de agrupación de primer orden, efecto de la etapa de verificación.* Se identifica en la tarea 1 al trabajar con 17 puntos verdes una estrategia de primer orden, cuando el estudiante E3 plantea la operación  $4 \times 4 = 16$  y sobra un punto azul para diecisiete. Escribe en la casilla de puntos naranjas el número 4, en la casilla de puntos azules el número 4 y en la casilla de puntos verdes el número 1. Sin tener conciencia de que un punto naranja equivale a cuatro puntos azules y por lo tanto a dieciséis puntos verdes. El abandono de esta estrategia empieza en la etapa de verificación. Al permitir que los estudiantes observen que una varilla naranja está conformada por cuatro puntos azules y que, al ser pasada a la casilla de la izquierda, la varilla agrupada se convierte en un punto naranja (línea N°8. Tarea 1). Los estudiantes utilizan un método que conserva la estructura de secuencia, solo que no cuentan de cuatro en cuatro como en el nivel 1 sino que tienen en cuenta que la cantidad de elementos por grupo se incrementa. Ahora para identificar la cantidad de puntos verdes en un punto naranja cuentan en secuencia de dieciséis en dieciséis.
- *Efecto de la dialéctica exploración/anticipación.* Luego de responder anticipar incorrectamente los dos primeros ejercicios, realizan el tercero por exploración. Se puede interpretar que la pareja decide buscar una nueva estrategia, consecuencia de los resultados incorrectos de las dos tareas anteriores. Cuando la

pareja termina la tarea 3 netamente por exploración, deciden anticipar la tarea 4. Antes de contestar en las casillas, la pareja escribe en sus cuadernos una relación constitutiva de elementos que les permite identificar que cuatro puntos azules conforman a un punto naranja y por lo tanto tres puntos naranjas son cuarenta y ocho puntos verdes (línea N°3. Tarea 4). Se procede a contestar en las casillas, entra a la etapa de verificación y dice “¡Ah! ya entiendo” (línea N°8. Tarea 4). La anterior afirmación nos permite identificar que hay una toma de conciencia sobre la constitución de unidades de orden superior.

- Se identifica un refuerzo de estrategia, cuando el estudiante E3 contesta la tarea 5 y el estudiante E4 afirma que no sabe (línea N°6. Tarea 5). E3 le explica a E4 y a la vez le pide el favor que realice la etapa de verificación (línea N°9. Tarea 5). E4 al realizar la etapa de verificación y confirmar que coinciden las respuestas, decide contestar la tarea 6 por anticipación. Implementa la estrategia de la constitución de unidades de orden superior, cuando afirma que dos puntos naranjas son treinta y que dos puntos azules son ocho puntos verdes (línea N°3. Tarea 6).
- En el proceso evaluativo se identifica un aprendizaje por adaptación en el abandono y refuerzo de estrategias asociadas a la toma de conciencia de los dos procesos de agrupación, que llevan a cabo las tareas de nivel dos. Al decidir realizar dos tareas por anticipación sin tener conciencia de una estrategia de agrupación de segundo orden, el medio permite que los estudiantes realicen la validación y a su vez tomar conciencia de la agrupación de segundo orden. La

tercera tarea realizada por exploración permite reforzar una estrategia multiplicativa para una agrupación de segundo orden y así poder solucionar las siguientes tres tareas por anticipación de manera satisfactoria, lo que les permite pasar al siguiente nivel.

### **2.3.Desagrupación nivel 1 (base 4) Análisis tareas de exploración- anticipación**

#### **2.3.1. Pareja A: Tareas de exploración- anticipación**

##### **2.3.1.1.Tarea 1: 2 puntos azules**

#### **Síntesis e interpretación de la interacción**

E1 hace lectura de la tarea y verbaliza los dos primeros múltiplos de cuatro para responder a la pregunta “*dos puntos azules...serian 4 ... 8*” (línea N°1). La verbalización de los múltiplos de 4 lo interpretamos como un indicio de la interiorización de las operaciones de agrupación: 1 punto azul-4 puntos verdes, 2 puntos azules-8 puntos verdes. La estrategia de solución funciona tanto para las agrupaciones como para las desagrupaciones, debido a que se estructura bajo un invariante que es la base (4) que se trabaja.

Las estudiantes deciden anticipar, por lo que hacen clic en el botón “Si, responder”.

Aparece la casilla de entrada y las estudiantes introducen el número 8. Luego hacen clic en el botón “Terminar”. En la etapa de verificación experimental, inicialmente, E1 comienza a mover uno de los puntos a la casilla naranja, pero se detiene, probablemente al tomar conciencia de que no es posible pasarlo sin agruparlo en una varilla (línea N°5) Inmediatamente, E2 le dice: “*Creo que lo deberías pasar acá,*” (línea N°6), interpretando correctamente la tarea como de desagrupación. Luego aparece una afirmación interesante

que da cuenta del objetivo que tiene la etapa de verificación: “*para demostrar que sí son 8*” (línea N° 8). En esta afirmación podemos interpretar que la estudiante es consciente que está haciendo un proceso de validación de la respuesta que proporcionó.

La estudiante E1 realiza las desagrupaciones y cuenta uno a uno la cantidad de puntos verdes (línea N°9), comprobando su respuesta.

### **2.3.1.2.Tarea 2: 3 puntos azules**

#### **Síntesis e interpretación de la interacción.**

E1 hace la lectura de la tarea e inmediatamente realizan una afirmación sobre la posible respuesta. Hacen uso de la multiplicación para calcular la respuesta (línea N° 2). Afirman que la tarea es sencilla y deciden anticipar (línea N° 3). Introducen el número 12 en la casilla de entrada y luego hace clic en “Terminar”. Aparece la etapa de verificación, arrastran los puntos azules de la casilla azul a la casilla verde y hace un conteo por múltiplos “*cuatro...ocho... y este serían doce*” (línea N°11). Terminan la etapa de verificación y aparece la pregunta que confronta la respuesta que dieron las estudiantes y los puntos en la pantalla. Efectivamente es la misma y responden que si hay correspondencia entre la respuesta y los puntos.

Observamos en la interacción un desarrollo muy fluido del proceso de anticipación, las estudiantes al parecer comprenden inmediatamente el objetivo de la tarea y responden correctamente. Interpretamos que el desempeño que se muestra en la tarea es fruto de las interacciones anteriores y es una muestra la interiorización de la estructura base 4 que se maneja en las tareas. La relación puntos verdes-puntos azules, se comprende y se utiliza para resolver las preguntas.

### **2.3.1.3.Tarea 3: 2 puntos azules y 1 punto verde**

#### **Síntesis e interpretación de la interacción.**

E1 hace lectura de la tarea. E2 realiza una afirmación sobre la respuesta “9” (línea N° 2). En este caso las estudiantes escriben la pregunta y enseguida escriben la respuesta. Toman la decisión de responder por medio de la anticipación. E1 introduce el número 9. Podemos observar en la respuesta inmediata, el uso de los cálculos en la tarea uno. Interpretamos que la respuesta que pueden ofrecer casi instantáneamente se debe a que parten de la solución de tareas previas que, si bien no se recuerdan explícitamente, sí utilizan ese conocimiento para resolver la tarea actual.

Luego de introducir la respuesta, hace clic en “Terminar”. Aparece la etapa de verificación, la estudiante E1 realiza las desagrupaciones y E2 acompaña el proceso haciendo alusión a la cantidad de puntos verdes que hay en los puntos azules (líneas N° 8-10). Terminan la tarea y responden que hay correspondencia entre los puntos en la pantalla y la respuesta que proporcionaron al iniciar la tarea.

### **2.3.1.4.Tarea 4: crear 1 puntos azul**

#### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E1 hace lectura de la tarea e inmediatamente las dos estudiantes realizan una afirmación sobre la respuesta (línea N°2). En este caso particular, interpretamos que las respuestas contundentes se deben al nivel de dificultad que tiene el enunciado de la tarea, se solicita realizar la descomposición básica de un punto azul, es decir, 4 puntos verdes. Las estudiantes deciden anticipar. Aparece la etapa de anticipación e introducen la respuesta de inmediato y hacen clic en el botón “Terminar”. Aparece la etapa de

verificación, arrastran el punto azul de la casilla azul a la casilla verde pero no dicen nada. Por último, terminan el ejercicio de verificación y proceden a contestar la pregunta que confronta la respuesta que proporcionaron con los elementos en la pantalla. Su respuesta es afirmativa, luego terminan la tarea.

### **2.3.1.5.Tarea 5: 3 puntos azules y 1 punto verde**

#### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E1 hace la lectura de la tarea e inmediatamente E2 habla sobre la cantidad de puntos verdes que se necesitan (línea N°2), en este caso 13. Observamos en la respuesta que proporciona la estudiante, que ya se ha interiorizado la estructura y es posible hacer las descomposiciones de forma mental. La pareja ha tenido la oportunidad de resolver 4 tareas de manera que ya ha realizado descomposiciones en cada una, lo que ofrece un referente sólido para responder de manera contundente la pregunta, como lo hacen en la tarea actual.

Toman la decisión de anticipar. E1 introduce la respuesta en la casilla de entrada y hace clic en el botón “Terminar”. Aparece la etapa de verificación, la estudiante E1 arrastra los puntos azules a la casilla pero no realiza el conteo de la cantidad de verdes que resultan al desagrupar. Interpretamos este hecho como una manera de dar por sentado que la respuesta es correcta. En efecto, el número de puntos verdes corresponden a la respuesta que proporcionaron Se termina la tarea.

#### **Análisis a nivel global: Automatización de la gestión didáctica.**

- *Consciencia de la función que cumple la etapa de verificación.* En la primera tarea, después de una duda sobre la interpretación de la solicitud de

desagrupar, las estudiantes comprenden que se trata de hacer la operación inversa de las que habían realizado anteriormente, y en todos los demás ejercicios llevan los puntos azules a la casilla verde para verificar la validez de sus respuestas. En todos los ejercicios anticiparon correctamente, de manera que la validación fue positiva.

- *Refuerzo de la estrategia que funciona para anticipar la agrupación y desagrupación.* En el desarrollo de las tareas podemos identificar el uso de la multiplicación como estrategia para calcular las respuestas. En los primeros ejercicios los estudiantes explicitan de manera oral el conteo en múltiplos de 4 y la multiplicación como estrategias para responder (y responden correctamente). En los últimos ejercicios no explicitan sus estrategias de cálculo, pero responden correctamente. Esto es un indicio de la interiorización de las operaciones de agrupación y desagrupación y del refuerzo de las estrategias de anticipación.
- *Tomar la decisión de resolver todas las tareas por medio de la anticipación.* la pareja A no resolvió ninguna tarea por medio de la exploración. Sin embargo, las respuestas correctas y la explicitación oral del conteo por múltiplos y la multiplicación son indicios de la utilización de estrategias adecuadas para anticipar. Interpretamos que gracias a las tareas de introducción y de agrupación, desarrollaron estrategias adecuadas para la anticipación, y estas estrategias se reforzaron gracias a la verificación experimental.
- *Se evalúa la cantidad de tareas correctas, resueltas por medio de la anticipación.* Al finalizar la secuencia, el software de acuerdo al record de tareas correctas que

en este caso fueron cinco, le permite avanzar al siguiente nivel y le indica mediante un letrero (retroacción didáctica) que la estrategia que ha utilizado funciona para resolver las tareas.

### **2.3.2. Pareja B: Tareas de exploración- anticipación**

#### **2.3.2.1.Tarea 1: 1 punto azul**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E4 procede a leer el enunciado, llevan el cursor al botón “Si, responder” y hacen clic. E4 verbaliza que un punto azul son cuatro puntos verdes (línea N°3) y E3 ingresa el número cuatro en la casilla. Se puede identificar que la pareja es consciente de la constitución de un punto azul.

E3 lleva el cursor al botón “Terminar” y aparecen los elementos necesarios para la verificación experimental, con el letrero que les solicita realizar las respectivas desagrupaciones y verificar la respuesta. E4 hace la desagrupación, lleva el cursor al botón “Terminar” y hace clic. La pareja verifica que la cantidad de puntos en la etapa de verificación coincide con la respuesta que se dio en un principio. Llevan el cursor al botón “Si” y continúan con la siguiente tarea.

#### **2.3.2.2.Tarea 2: 3 puntos azules y 2 verdes**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E3 lee el enunciado y E4 escribe en el cuaderno tres veces el número cuatro, diciendo que van doce (línea N°2). E3 interviene afirmando que faltarían los dos puntos verdes y por lo tanto serían catorce puntos verdes (línea N°3). E4 acepta la afirmación de E3 y escribe en la casilla el número catorce. Se identifica una estrategia aditiva, cuando

E4 es consciente de que un punto azul está conformado por cuatro puntos verdes y al sumar los tres puntos azules da como resultado doce puntos verdes.

La pareja procede hacer el proceso de desagrupación y verifican que las respuestas coinciden.

### **2.3.2.3.Tarea 3: 1 punto azul y 1 punto verde**

#### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E4 lee el enunciado de la tarea, y responde por anticipación correctamente (sin consultarle a E4). Hacemos la hipótesis de que la pareja es consciente e interioriza la constitución de un punto azul, a su vez relacionan los puntos verdes como unidades para utilizar la estrategia aditiva y llegar al cardinal.

La pareja hace el debido proceso de desagrupación para verificar experimentalmente su respuesta.

### **2.3.2.4.Tarea 4: 3 puntos azules y 1 punto verde**

#### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E3 lee el enunciado de la tarea y dice “*cuatro por tres*” (línea N°1). Interpretamos esta afirmación como la operación de tres puntos azules con la cantidad de puntos verdes que conforman cada uno. Se puede evidenciar que el estudiante utiliza una estrategia multiplicativa, siendo consciente de la constitución de un punto azul. Por otro lado, E4 interviene afirmando que falta sumar un punto verde (línea N°2) e ingresa en la casilla el número trece. Lleva el cursor al botón “Terminar” y hace clic. Aparecen los elementos necesarios (3 puntos azules y 1 punto verde) y el letrero que les solicita hacer el proceso de desagrupación para verificar el resultado.

La pareja se turna para realiza el proceso de desagrupación arrastrando los puntos azules a la casilla verde, utilizan la herramienta “x” para desagrupar los puntos verdes, llevan el cursor al botón “Terminar” y hacen clic. Aparece el letrero que les pregunta si las respuestas coinciden, E3 lleva el cursor al botón “Sí” y hace clic.

#### **2.3.2.5.Tarea 5: 1 punto azul y 2 puntos verdes**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E4 lee la tarea y procede a contestar por anticipación. Escribe en la casilla el número 6, para responder, que con seis puntos verdes se pueden crear un punto azul y dos puntos verdes. Llevan el cursor al botón “Terminar” y hace clic. Aparecen los elementos necesarios (1 punto azul y 1 punto verde) y el letrero que les solicita realizar las desagrupaciones pertinentes para verificar la respuesta.

La pareja se turna para realizar el proceso de desagrupación, hacen clic en el botón “Terminar”, aparece el letrero que les pregunta si las respuestas coinciden, llevan el cursor al botón “Sí” y hacen clic. Por último, aparece el letrero afirmando que la estrategia que han utilizado para realizar las tareas ha sido satisfactoria y los invita a continuar con la figura “Tarea 6”.

##### **Análisis global: Automatización de la gestión didáctica.**

- *Tomar la decisión de resolver todas las tareas por medio de la anticipación:* la pareja B realiza todas las tareas por anticipación, gracias al proceso de las tareas de introducción, agrupación, desagrupación y a la verificación. Este proceso hace que los estudiantes tomen conciencia de la constitución de los puntos. Y encuentran una estrategia multiplicativa, que además lleva incorporada la estructura base 4. Esto se evidencia en la tarea 4 (línea N°1), cuando el estudiante

E3 multiplica la cantidad de puntos azules (tres) por la cantidad de puntos verdes que constituyen a cada punto azul (cuatro). Lo anterior permite llegar a una solución correcta y al reconocimiento de la descomposición de unidades de orden superior. A su vez hace que la pareja realice de forma correcta todas las tareas por anticipación y por lo tanto concluimos que se produjo un aprendizaje por adaptación.

- *Realizar la verificación permite que la pareja refuerce la estrategia multiplicativa:* se evidencia cuando la pareja utiliza una suma reiterada en la tarea 2 (línea N°2) sumando tres veces el número cuatro. Al llegar a la tarea 4 el estudiante E3 ya utilizan la suma reiterada, sino que multiplica la cantidad de puntos azules (tres) por la cantidad de puntos verdes que constituyen a cada punto azul (cuatro). Hacemos la hipótesis que el refuerzo de la estrategia multiplicativa es efecto de la verificación experimental, al momento de dar a conocer la constitución de los puntos y el funcionamiento de la descomposición. Efecto esperado en el diseño de la secuencia.
- *Se evalúa la cantidad de tareas correctas, resueltas por medio de la anticipación.* Como en la pareja A, la pareja B realiza cinco tareas por medio de la anticipación, lo que permite avanzar al siguiente nivel y les indica mediante un letrero (retroacción didáctica) que la estrategia que ha utilizado funciona para resolver las tareas.

## **2.4.Desagrupación nivel 2 (base 4)**

### **2.4.1. Pareja A: Tareas de exploración- anticipación**

#### **2.4.1.1.Tarea 1: 1 punto naranja, 1 punto azul y 1 punto verde:**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E1 hace la lectura de la tarea. Inmediatamente E2 realiza una afirmación sobre la posible solución: “*serían 5 puntos azules...eh, para formar 5 puntos azules serían... 4 por 5, 20... se necesitarían 20, eh, 21*” (línea N°2)., interpretamos que realiza una descomposición de 1 punto naranja igual a 4 azules, suma un punto azul, serían 5 puntos azules, que luego convierte en puntos verdes, es decir, 20 puntos verdes y le suma un punto verde restante que aparece en el enunciado de la tarea (21 puntos verdes). La estudiante tiene claro el proceso de descomposición. Se observa la toma de conciencia sobre la naturaleza constitutiva de los puntos de unidades superiores (azules y naranjas). De nuevo utiliza la multiplicación como recurso para calcular la cantidad de puntos verdes.

E1 hace clic en “Si, responder”, introduce el número que resultó de los cálculos iniciales y hace clic en “Terminar”. E2 realiza las desagrupaciones, primero toma el punto naranja lo arrastra a la casilla azul y desagrupa los puntos azules haciendo uso de la herramienta “x”. Después pasa los 5 puntos de la casilla azul a la casilla verde. Cada vez que pasa un punto azul a la casilla verde verbaliza un múltiplo de 4 en secuencia (línea N° 6). Termina el proceso de verificación y contestan la pregunta que confronta la respuesta y los puntos en la pantalla.

#### **2.4.1.2.Tarea 2: 1 punto naranja y 1 punto azul**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E1 hace lectura de la tarea. no hay acciones ni manifestaciones verbales previos a tomar la decisión de resolver la tarea por medio de la anticipación. E1 hace clic en “Si, responder” y aparece la etapa de anticipación, E1 dice “y *serían veinte*” (línea N° 3). Observamos que la respuesta se afirma de manera inmediata después de leer la tarea. Interpretamos este hecho como consecuencia de los cálculos en la tarea anterior, puesto que la cantidad de puntos se diferencia en 1. La estudiante posee entonces un referente inmediato al cual acude para dar respuesta a la pregunta que se hace en la tarea actual.

E1 introduce la cantidad en la casilla de entrada y luego hace clic en el botón “Terminar”. Aparece la etapa de verificación, E1 se encarga de realizar las desagrupaciones. Arrastra el botón azul a la casilla verde y verbaliza, “*cuatro*”. Luego arrastra el punto naranja a la casilla azul y desagrupa los puntos azules haciendo uso de la herramienta “x”. Finalmente arrastra los puntos azules de la casilla azul a la verde. En cada paso verbaliza los siguientes múltiplos de cuatro (línea N°5). Termina la verificación experimental y responde “Si” a la pregunta que confronta la respuesta con los puntos en la pantalla. Termina la tarea.

### **2.4.1.3.Tarea 3: 1 punto naranja y 3 puntos verdes**

#### **Síntesis e interpretación de la interacción**

E1 hace lectura de la tarea e inmediatamente y realiza una afirmación sobre la posible respuesta: *Entonces serían mmm... 1 punto naranja tiene 4 azules y 1 azul tiene 4... entonces sería 4 por 4 16 ... entonces serían 16... 17, 18, 19 ... 19 puntos verdes*” (línea N° 1). Observamos en la verbalización, que hay conciencia sobre la cantidad de

puntos azules que tiene un punto naranja (4 puntos azules). Luego, de manera inmediata, multiplica esa cantidad de puntos azules por 4. Interpretamos esta multiplicación como evidencia de conciencia sobre la cantidad de puntos verdes que contiene cada uno de los puntos azules y que, por lo tanto, para conocer la cantidad total de puntos verdes, la multiplicación es una estrategia coherente para llegar al resultado. Por último, suman uno a uno los puntos verdes restantes, que aparecen en el enunciado de la tarea.

E1 introduce la cantidad de puntos verdes que resultaron del cálculo anterior. Luego hace clic en el botón “Terminar”. Aparece la etapa de verificación, E1 realiza el proceso de desagrupación. Arrastra el punto naranja a la casilla azul y desagrupa los puntos azules haciendo uso de la herramienta “x”. Luego arrastra los puntos azules de la casilla azul a la casilla verde. Conforme pasa cada uno de los puntos verbaliza los múltiplos de 4. Cuando ya ha pasado todos los puntos azules le agrega a la cuenta verbal que lleva “*dieciséis... diecisiete... si ... diecinueve*” (línea N°3), En la última expresión que utiliza observamos que confirma la cantidad de puntos que predijo en la respuesta a la tarea. Termina la etapa de verificación y responde “Si” a la pregunta que confronta la respuesta con los puntos en la pantalla.

#### **2.4.1.4.Tarea 4: 2 puntos naranja y 2 puntos azules**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E2 hace la lectura de la tarea y dice “*A ver, entonces primero convirtamos los azules... entonces dos puntos azules serían ...*” (línea N°2) en este momento E1 interrumpe a E2 y le sugiere hacer clic en “No, crear y responder”. E2 afirma “*para que sea más fácil*” y procede a hacer clic en el botón. Aparece la etapa de exploración con el

letrero emergente que le indica cómo utilizar los distribuidores y las canecas. E2 crea dos puntos naranjas y dos puntos azules. Arrastra los dos puntos azules a la casilla verde. Luego arrastra los dos puntos naranjas a la casilla azul y desagrupa los puntos de las varillas naranjas (8 puntos azules en total). Por último, pasa los puntos azules que desagrupó a la casilla verde. Cuenta la cantidad total de varillas azules y multiplica esa cantidad por cuatro para llegar a la conclusión de que hay 40 puntos verdes. Observamos que la manera como se dio la interacción con la etapa de exploración no se concentra en la creación de una estrategia diferente para responder a la tarea, sino como un método eficiente para responder a la tarea sin tener que hacer cálculos. E2 crea los puntos, desagrupa, realiza el conteo de la cantidad total de puntos azules y la multiplican por la base para llegar al resultado. Interpretamos que durante la interacción con la etapa de verificación experimental, en tareas previas, los estudiantes se dan cuenta que sí hay elementos relacionados a la cantidad de puntos que indica el enunciado no hay fallas en los cálculos, por lo que deciden en la tarea 4 recurrir a la exploración, un medio que les proporciona los elementos de forma inmediata para responder eficientemente la tarea.

Por último, la pareja introduce la respuesta a la que llegaron en la casilla de entrada en la etapa de exploración, hacen clic en “Terminar” y como la respuesta es correcta el software le permite avanzar a la siguiente tarea advirtiéndole que se ha contestado la tarea correctamente, que escriba la respuesta en el cuaderno y que se continúe con la siguiente tarea.

#### **2.4.1.5.Tarea 5: 3 puntos naranja, 3 puntos azules y 1 punto verde**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción**

E2 hace la lectura de la tarea. Deciden responder la tarea por medio de la exploración... E2 crea la cantidad de puntos que le indica la tarea (3 naranjas, 3 azules y 1 verde). Primero arrastra los tres puntos azules a la casilla verde. Mientras pasa cada uno de los puntos dice “cuatro”, “ocho”, “y doce...” (línea N°5). Después toma cada uno de los puntos naranjas y los arrastra a la casilla azul. desagrupa los puntos azules y los pasa (ya desagrupados) a la casilla verde para continuar con el conteo por múltiplos de 4. En este proceso de desagrupación podemos observar que la pareja no utiliza la multiplicación como recurso para saber cuántos puntos verdes necesita. Utiliza la secuencia de múltiplos de 4 y la suma reiterada para llegar al resultado. Interpretamos que el cambio de estrategia se debe a que la cantidad de puntos es mucho mayor a las que han resuelto en tareas anteriores. Sin embargo, se consolida una estrategia válida para resolver las tareas, debido a que no deja de lado la estructura en grupos de 4 (como lo indica la base). La pareja introduce la cantidad en la casilla de entrada y termina la tarea. El software le permite avanzar a la siguiente tarea advirtiéndole que se ha resuelto correctamente la tarea.

#### **2.4.1.6.Tarea 6: 3 puntos naranjas y dos puntos azules**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E2 hace lectura de la tarea y realiza una afirmación sobre la posible respuesta: “*entonces serían cincuenta y seis, porque tres naranjas serían doce, eh... tres por cuatro eh..., tres por cuatro, doce... azules y, doce por cuatro o cuatro por doce, cuarenta y ocho eh, más otros dos puntos azules, cincuenta y seis*” (línea N°5). Podemos observar en la verbalización de E2 que retoma la estrategia multiplicativa. En este caso en

particular hace una multiplicación doble. La primera para saber cuántos puntos azules hay en 3 puntos naranjas (12 puntos azules) y la segunda, dada la cantidad total de puntos azules (14) multiplica este número por cuatro puntos verdes que hay en cada punto azul, lo cual les permite llegar al resultado (56 puntos verdes). Interpretamos que gracias a la exploración en la tarea anterior E2 se dio cuenta que la estructura multiplicativa se repite en el proceso de descomposición, lo cual sucede cuando hay un sistema posicional. En este momento podemos interpretar que hay conciencia de la estructura que tiene el sistema de puntos que simula la estructura de un sistema posicional, el cual consiste en hacer grupos y grupos de grupos con un mismo número de elementos por grupos de acuerdo a la base.

E2 decide anticipar, hace clic en “Si, responder” e introducen la cantidad que obtuvieron en el cálculo anterior (56). Luego hacen clic en el botón “Terminar” y aparece la etapa de verificación. En este momento E2 realiza las desagrupaciones haciendo un conteo en secuencia de los múltiplos de 4 hasta llegar a 56 por cada punto azul que se coloca en la casilla verde. Terminan la etapa de verificación y responden la pregunta que confronta la respuesta que proporcionaron al empezar la tarea, con los puntos en la pantalla. Responden afirmativamente la pregunta y terminan con la tarea y con la secuencia. El software les indica que ha concluido la secuencia de tareas y que las han desarrollado satisfactoriamente.

**Análisis a nivel global: Automatización de la gestión didáctica.**

- *Uso de la etapa de exploración como estrategia para crear un referente numérico que les permite resolver las siguientes tareas por medio de la anticipación.*

Podemos observar en la transcripción, que la pareja no tuvo dificultades para resolver las primeras tres tareas por medio de la anticipación. Coincidentalmente las primeras tres tareas no requieren desagrupar más de un punto naranja. Sin embargo, al llegar a las tareas 4 y 5, donde se utiliza más de un punto naranja, toman la decisión de resolver la tarea por medio de la exploración y afirman “*para que sea más fácil*” (línea N°5 tarea 4). Resuelven las tareas satisfactoriamente creando puntos, desagrupando y contando los puntos verdes no uno a uno, sino por múltiplos de 4. En la sexta tarea el enunciado les propone desagrupar 3 puntos naranja y realizan la anticipación, utilizando una estrategia multiplicativa para calcular el número de puntos.

- *Uso de la multiplicación y el conteo en secuencia de múltiplos, como estrategia para la solución de las tareas.* En el desarrollo de la secuencia podemos observar la estrategia de conteo por múltiplos de 4 y la estrategia de multiplicación para anticipar. Hay un refuerzo de esta estrategia para resolver las tareas, tanto en la exploración como en la anticipación, puesto que les permite realizar desagrupaciones simultáneas que les permiten llegar a la cantidad final para responder la pregunta.
- *Adaptación de una estrategia para resolver tareas del primer nivel para el segundo nivel.* La pareja utiliza la multiplicación como recurso para realizar las desagrupaciones en las tareas de primer nivel. En el segundo nivel, dado que son

dos desagrupaciones, para los puntos naranjas, la pareja opta por desagrupar en secuencias de múltiplos de 4, luego teniendo el cardinal de punto azules a los que equivale los puntos naranjas, multiplica esa cantidad por la base y luego agregan la cantidad de puntos verdes restantes. Ese fue el proceso de adaptación de la estrategia que se pudo identificar en el segundo nivel.

## **2.4.2. Pareja B: Tareas de exploración- anticipación**

### **2.4.2.1.Tarea 1: 1 punto naranja, 2 puntos azules y 1 punto verde**

#### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E4 lee la tarea y decide realizarla por anticipación. La pareja se remite a la lista de los múltiplos de cuatro escrita en el cuaderno. E3 afirma que cuatro puntos azules es un punto naranja y que un punto azul es cuatro puntos verdes (línea N°2). E4 interviene “*cuatro por cuatro*” (línea N°3). Podemos identificar que E3 tiene conciencia sobre la naturaleza constitutiva de los puntos de unidades de orden superior. Lo que conlleva a que E4 implemente una estrategia multiplicativa al operar la cantidad de puntos azules por los puntos verdes que constituyen a cada uno de estos. E3 realiza una suma reiterada de cuatro en cuatro para confirmar el resultado de la multiplicación que propone E4 (línea N°4) y afirma que sí es válida la operación. Identificamos que los estudiantes proponen, construyen, corrigen y refuerzan estrategias de cálculo aditivo y multiplicativo por medio del diálogo. Luego E3 suma los puntos verdes conformados por dos puntos azules (ocho) y E4 suma el punto verde para un total de veinticinco puntos verdes.

La pareja ingresa en la casilla el número 25 y contesta que se necesitan 25 puntos verdes para crear 1 punto naranja, 2 puntos azules y 1 punto verde. Dirigen el cursor al

botón “Terminar” y hacen clic. Aparecen los elementos necesarios (1 punto naranja, 2 puntos azules y 1 punto verde), y el letrero que les solicita hacer las desagrupaciones para verificar la respuesta. La pareja realiza el proceso de desagrupación. Arrastran primero el punto naranja a la casilla azul y desagrupan los puntos azules. Luego arrastran los puntos azules uno por uno a la casilla verde y desagrupan los puntos verdes de cada una de las varillas azules. E4 hace el conteo de los veinticinco puntos verdes (línea N°9), E3 dirige el cursor al botón “Terminar” y hace clic. Aparece el letrero, para que la pareja verifique su respuesta. Llevan el cursor al botón “Si”, hacen clic y aparece el letrero que los invita a continuar con la siguiente tarea.

#### **2.4.2.2.Tarea 2: 1 punto naranja, 2 puntos azules y 2 puntos verdes**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E4 lee la tarea y decide solucionarla por anticipación. E3 afirma que la tarea es fácil porque solo se le suma un punto verde (línea N°2) por lo que se necesitan veintiséis puntos verdes. Se identifica que E3 relaciona la cantidad de elementos de la tarea 1 para solucionar la tarea 2 y decide sumar un punto verde. La pareja dirige el cursor a la casilla, escribe el número 26, luego hacen clic en el botón “Terminar”. Aparecen los elementos necesarios (1 punto naranja, 2 puntos azules y 2 puntos verdes) y el letrero que les solicita hacer las desagrupaciones para verificar la respuesta.

Los estudiantes realizan las desagrupaciones pertinentes, arrastran el punto naranja a la casilla azul, desagrupan los puntos azules con la herramienta “x”, luego arrastran los puntos azules uno por uno a la casilla ver y hacen clic en la “x” de cada varilla azul para desagrupar los puntos verdes. E3 dirige el cursor al botón “Terminar”,

hace clic y aparece el letrero para verificar la respuesta, la pareja lleva el cursor al botón “Si” y hace clic. Aparece el letrero que los invita a contestar la siguiente tarea.

#### **2.4.2.3.Tarea 3: 1 punto naranja y 2 puntos azules**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E3 lee la tarea y hace clic en “Si, responder”. E4 interviene y afirma que el resultado de la tarea es veinticuatro, porque no cuenta con puntos verdes (línea N°2). Se identifica nuevamente que la pareja relaciona la cantidad de elementos de la tarea actual con la tarea 1 y modifica el resultado restando la cantidad de puntos verdes. E3 ingresa el número 24 en la casilla para responder que se necesitan 24 puntos verdes para formar 1 punto naranja y 2 puntos azules. Lleva el cursor al botón “Terminar”, hace clic y aparecen los elementos necesarios con el letrero que les solicita hacer las desagrupaciones para verificar la respuesta.

La pareja realiza las desagrupaciones pertinentes, arrastran y desagrupan las varillas hasta que todos los puntos verdes queden en la casilla verde. Llevan el cursor al botón “Terminar” y hacen clic. Aparece el letrero para verificar la respuesta, la pareja lleva el cursor y seleccionan el botón “Si”. Continúan con la siguiente tarea.

#### **2.4.2.4.Tarea 4: Si debo crear 3 puntos naranjas, 1 punto azul y 3 puntos verdes**

##### **¿Cuántos puntos verdes necesito?**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E4 lee la tarea y dirige el cursor al botón “Si, responder”. E3 plantea una suma reiterada de la cantidad de puntos naranjas, al sumar tres veces dieciséis (línea N°2). Se evidencia que el estudiante es consciente de la naturaleza constitutiva del punto naranja e

implementa la suma reiterada como estrategia aditiva. E4 complementa y afirma que hay que sumar los cuatro puntos verdes que conforman el punto azul (línea N°3). E3 dirige la cuenta del cardinal y afirma que falta sumar los tres puntos verdes para un total de cincuenta y cinco (línea N°4). E4 de manera rápida escribe el número cincuenta y nueve a la casilla, lleva el cursor al botón “Terminar” y hace clic. Aparecen los elementos necesarios con el letrero que les solicita realizar las desagrupaciones para verificar el resultado. E4 arrastra los puntos naranjas uno por uno a la casilla azul y desagrupa los puntos azules de las varillas naranjas. E3 le dice a E4 que eran cincuenta y cinco (línea N°6). Se puede identificar que la pareja implementó una estrategia multiplicativa y aditiva de forma correcta, pero E4 comete el error de ingresar de forma incorrecta el dígito en la casilla.

E3 arrastra los trece puntos azules uno por uno a la casilla verde. Luego hace clic en la herramienta “x” de cada una de las varillas azules y desagrupa los puntos verdes. E4 con la cantidad de puntos verdes desagrupados (línea N°7), dirige el cursor al botón “Terminar” y hace clic. Aparece el letrero que les indica si los resultados coinciden, E3 lleva el cursor al botón “No” y lo selecciona. Aparece el letrero que los invita a responder de forma correcta en la casilla. E4 ingresa el número cincuenta y cinco, hace clic en terminar y continúan con la siguiente tarea.

#### **2.4.2.5.Tarea 5: Si debo crear 3 puntos naranjas, 1 punto azul y 1 punto verde**

**¿Cuántos puntos verdes necesito?**

**Síntesis e interpretación de la interacción:**

E4 lee la tarea y decide realizarla por anticipación. E3 afirma que hay que restar dos puntos verdes al ejercicio anterior para tener el resultado de cincuenta y tres (línea N°2). Se puede identificar que el estudiante tiene presente la cantidad de elementos de la tarea 4, los modifica con la operación resta, eliminando los puntos verdes para llegar a resolver la tarea 5. Por otra parte, E4 realiza una suma reiterada al sumar tres veces dieciséis, luego suma los cuatro puntos que conforman el punto azul, por último, suma el punto verde y valida el resultado de E3 (línea N°3). E3 lleva el cursor a la casilla e ingresa el número 53, luego dirige el cursor al botón “Terminar” y hace clic.

Aparecen los elementos necesarios con el letrero que solicita hacer las desagrupaciones para verificar la respuesta. La pareja realiza las desagrupaciones pertinentes hasta que los puntos verdes quedan totalmente desagrupados. E3 señala la pantalla y cuenta los puntos “*cincuenta y tres*” (línea N°6). Dirige el cursor al botón “Terminar” y hace clic. Aparece el letrero que les indica si los resultados coinciden, lleva el cursor al botón “Si” hace clic y aparece el letrero que le indica que la estrategia que ha utilizado ha sido la correcta y que ha terminado las tareas.

**Análisis global: Automatización de la gestión didáctica.**

- *Refuerzo de la estrategia para resolver las tareas, por medio de la anticipación:*  
Como en la pareja A, la pareja B implementa el uso de la multiplicación y el conteo en secuencia de múltiplos, como estrategia para la solución de las tareas.  
La pareja en varias ocasiones se centra en la suma reiterada, en la multiplicación y en el conteo para el desarrollo de la secuencia sin olvidar la base en que se

- trabaja. Esto permite que la estrategia se interiorice en los estudiantes y anticipen de forma correcta las tareas.
- *Creación de nuevas estrategias:* La pareja B presenta una nueva estrategia para la solución de las tareas. Inician desde el resultado de la tarea anterior y modifican el cardinal, sumando o restando puntos. Esto se puede evidenciar en varias tareas, como en la tarea 2 que deben crear 1 punto naranja, 2 puntos azules y 2 puntos verdes. Los estudiantes tienen presente el enunciado de la tarea 1 que le pide crear 1 punto naranja, 2 puntos azules y 1 punto verde y su respuesta que es veinticinco. Por lo que solo suman 1 punto verde para tener el resultado de la tarea 2 que es veintiséis. Se hace la hipótesis que los estudiantes hacen una relación del valor posicional de los puntos sin olvidar la naturaleza constitutiva en la que se trabaja (base 4).
  - *Se evalúa la cantidad de tareas correctas, resueltas por medio de la anticipación.* El software, les permite avanzar al siguiente nivel y le indica mediante un letrero (retroacción didáctica) que la estrategia que ha utilizado funciona para resolver las tareas por lo que puede pasar al siguiente nivel. El letrero mencionado anteriormente aparece de acuerdo al record de tareas correctas que se realizó por anticipación, que en este caso fueron cinco correctas.

### **3. Análisis tareas de exploración- anticipación (agrupación-base 10)**

A continuación, presentamos la descripción de la interacción de la pareja A con las tareas de exploración-anticipación. Cabe aclarar que no se realizan las tareas de introducción puesto que se espera que ya resueltas las tareas en base 4 los estudiantes comprenden el funcionamiento del sistema de tareas en agrupación y desagrupación. El profesor aclara que ahora se trabaja en base diez, es decir, que en una varilla ahora se agrupan 10 puntos.

#### **3.1.Tareas de agrupación:**

##### **3.1.1. Pareja A: Etapa de exploración-anticipación nivel 1**

###### **3.1.1.1.Tarea 1: 47 puntos verdes**

#### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E1 hace la lectura de la tarea. E1 escribe en el cuaderno la pregunta. Inmediatamente E2 realiza una afirmación sobre la posible respuesta: “*Si son de a diez entonces serían 4 azules [...] 4 azules que nos saldrían y 7 que sobrarían*” (líneas N° 4 y 6). La estudiante tiene presente la cantidad de puntos que conforman un grupo (ahora en base 10). De inmediato realizan una afirmación sobre la cantidad de grupos que se pueden formar (4) dada la cantidad de puntos que presenta el enunciado. Interpretamos este hecho como evidencia de que hay conciencia de la estructura enmarcada en la agrupación de elementos con un cardinal específico (la base 10) pero aún no han tomado conciencia de la equivalencia de la representación posicional decimal, que les permitiría evitar los cálculos.

E2 hace clic en “Sí, responder”. Aparece la etapa de anticipación, E2 introduce el número 4 en la primera casilla y 7 en la segunda casilla. Luego hacen clic en el botón “Terminar”, aparece la etapa de verificación. E2 realiza las agrupaciones de los puntos verdes en las varillas azules y forma 4 puntos azules, luego cuenta cada uno de los puntos verdes que sobran. E2 termina la etapa de verificación y responde la pregunta que confronta la respuesta que proporcionaron y las agrupaciones que hicieron en la verificación. Responde afirmativamente la pregunta y terminan la tarea.

### **3.1.1.2.Tarea 2: 61 puntos verdes**

#### **Síntesis e interpretación de la interacción.**

E1 hace lectura de la tarea e inmediatamente E2 realiza una afirmación sobre la posible respuesta. *“un punto verde que sobraría y seis azules... sí, porque si son de a diez...”*. E1 escribe en el cuaderno la pregunta y la respuesta. En las afirmaciones de E2 podemos observar que vuelve a tener presente el referente de agrupación: *“de a diez”* (línea N°4). Interpretamos que, el hecho de crear grupos de 10 funcionará como estrategia resolver eficientemente la tarea anterior, lo motiva a reforzar la estrategia en la tarea actual.

E2 decide resolver la tarea por medio de la anticipación. hace clic en “Si, responder”, aparece la etapa de anticipación. E2 introduce las cantidades correspondientes al cálculo anterior (líneas N°8 y 9). Luego hacen clic en el botón “Terminar”, aparece la etapa de verificación. E2 procede a realizar las agrupaciones reafirmando la respuesta que proporcionaron *“sí, entonces sí serían, tres... sí, seis puntos azules y uno verde”* (línea

Nº10). Termina la verificación experimental y responde afirmativamente la pregunta que confronta la respuesta que proporcionaron y las agrupaciones. Terminan la tarea.

### **3.1.1.3.Tarea 3: 23 puntos verdes**

#### **Síntesis e interpretación de la interacción**

E2 hace lectura de la tarea e inmediatamente E2 dice “*Serían entonces 2 azules y...*” E1 lo complementa “*tres verdes*”. Luego deciden responder la tarea por medio de la anticipación. Hacen clic en el botón “Si, responder”. E2 introduce las cantidades correspondientes al cálculo anterior. En este momento E2 dice “*mira que descubrí algo... aquí*” [señala con el esfero el número 23 de instrucción de la tarea] “*si se separan estos dos números siempre va a dar 2... azules... y sobrarían 3 puntos verdes*” E1 se da cuenta que existe una relación entre el número del enunciado y la cantidad de grupos (puntos azules) que puede formar y los elementos unitarios (puntos verdes) que sobran. Interpretamos este hecho como la toma de conciencia de la representación posicional de la cantidad de grupos “decenas” y elementos unitarios “unidades” presentes en el número; además, (línea Nº8), E1 dice: *se juntan y forman 23*.

Después de la afirmación de E1, hacen clic en el botón “Terminar”. Aparece la etapa de verificación. E2 realiza las agrupaciones formando 2 puntos azules, y dice “*dos azules y tres verdes*” (línea Nº11). Termina la verificación experimental y responde la pregunta que confronta la respuesta que proporcionaron con las agrupaciones. Responde afirmativamente y termina la tarea.

### **3.1.1.4.Tarea 4: 24 puntos verdes**

### **Síntesis e interpretación de la interacción**

E1 hace la lectura de la tarea. E2 realiza una afirmación sobre la cantidad de puntos azules que se pueden formar y la cantidad de puntos verdes que sobran: “*entonces sería formando eso sería 2 y 4*”. La afirmación de E2 es casi inmediata, sin embargo, podemos observar en la afirmación de E2, diferente a las tareas anteriores, solo realiza una afirmación sobre la cantidad “2 y 4”, sin referenciar las magnitudes (puntos azules y puntos verdes). Interpretamos este hecho como el refuerzo de la observación de E1 en la tarea 3. Separa los dígitos del número para responder a la tarea. Asume que la cantidad de puntos azules se denota por el segundo dígito y la cantidad de puntos verdes por el primer dígito. Podemos hablar entonces, de una estrategia que omite los cálculos y se concentra en la relación de representación posicional de los dígitos con la cantidad de puntos azules y puntos verdes.

E2 decide resolver la tarea por medio de la anticipación, hace clic en “Si, responder”, y aparece la etapa de anticipación. E2 introduce las cantidades que emergen de su afirmación inicial. Luego hacen clic en el botón “Terminar”. Aparece la etapa de verificación, E2 procede a realizar las agrupaciones, sin embargo, en vez de agrupar cada punto de manera individual a la varilla, toma la varilla y la aproxima a los puntos, los puntos quedan inmediatamente pegados a la varilla (línea N°8). Podemos observar aquí una estrategia nueva para realizar las agrupaciones. Interpretamos que E2 es consciente que la varilla debe llenarse para pasarse a la siguiente casilla. El hecho de acercar la varilla a los puntos permite agrupar, de manera casi inmediata, la cantidad suficiente de puntos para llenar la varilla y pasarla a la siguiente casilla. Después de realizar todas las

agrupaciones posibles E2 termina la verificación experimental y responde la pregunta que confronta la respuesta que proporcionaron con las agrupaciones.

#### **3.1.1.5.Tarea 5: 38 puntos verdes**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción.**

E2 realiza la lectura de la tarea, e inmediatamente E1 y E2 realizan afirmaciones sobre la respuesta “*Entonces sería 3 y 8*” “*sería 3 y 8*” (líneas N°2 y N°3). Interpretamos las afirmaciones unánimes de los estudiantes como un refuerzo de la estrategia de resolución basado en la observación de los dígitos que presenta el enunciado de la tarea. En efecto ambos estudiantes hablan de la cantidad sin hacer referencia a las magnitudes (puntos azules y puntos verdes) como en la tarea anterior. Los estudiantes abandonan los cálculos asociados a la multiplicación y la división, para concentrarse en el valor posicional de los dígitos en el número.

E2 decide resolver la tarea por medio de la anticipación, hace clic en “Si, responder”. Aparece la etapa de anticipación, E2 introduce las cantidades que corresponden a su afirmación anterior. Luego hacen clic en “Terminar”, y aparece la etapa de verificación. E2 realiza las agrupaciones y complementa las acciones reafirmando con un conteo “*entonces serían 3...*” [...] “*un, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho...sí.*” (línea N°4). Termina la verificación experimental y responde la pregunta que confronta la respuesta que proporcionaron con las agrupaciones. La respuesta es afirmativa. Terminan con la secuencia de tareas y aparece el letrero que les indica que la estrategia que han utilizado ha sido la adecuada y que pueden avanzar al siguiente nivel.

## **Análisis global de la interacción en la secuencia: Automatización de la gestión**

### **didáctica:**

- *Interiorización de la estructura posicional en el proceso de agrupación teniendo en cuenta un referente numérico: La base.* En desarrollo de las primeras dos tareas la pareja realiza una afirmación sobre el referente numérico “*de a diez*” para realizar las agrupaciones y responder la pregunta de cada enunciado. Las respuestas se proporcionaron casi de forma inmediata. Podemos decir que el cálculo para identificar las cantidades de puntos azules y verdes se facilita debido al contacto con el proceso de agrupación que tuvieron en las tareas en base 4. Los estudiantes son conscientes que el proceso consiste en hacer grupos de la misma cantidad de elementos cada uno. Además, tienen presente que no se puede formar un punto azul si no tienen la cantidad suficiente de puntos verdes. Por lo tanto, la cantidad de puntos que no es mayor o igual a la base corresponde a la cantidad de puntos verdes sobrantes.
- *Incorporación de una estrategia basada en los dígitos del número para resolver las tareas:* Desde la afirmación de E1 en la tarea 3 sobre la relación entre el número de puntos verdes del enunciado y la cantidad de puntos azules que se pueden formar y la cantidad de puntos verdes que sobran, se cambia la estrategia de resolución. Se dan cuenta que, al tomar los dígitos del enunciado en un orden específico se encuentra la respuesta a la tarea. El primer dígito que aparece de izquierda a derecha corresponde al número de puntos azules que se pueden formar, y el segundo dígito corresponde al número de puntos verdes sobrantes. De

acuerdo a la observación, podemos identificar un refuerzo de esta estrategia en las tareas 4 y 5. Las afirmaciones que realizan los estudiantes se concentran en la separación de los dígitos para dar la respuesta. abandonan entonces las estrategias multiplicativas para la resolución de las tareas.

### **3.1.2. Pareja B: Tareas de exploración- anticipación base diez**

A diferencia de la pareja A, esta pareja pasa directamente al ejercicio, sin que el profesor aclare que se está trabajando en una base diferente, ni que ahora cada varilla se llena con 10 puntos.

#### **3.1.2.1.Tarea 1- 48 puntos verdes**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E4 lee la tarea, afirman que ya habían realizado un ejercicio similar y por tanto deciden anticipar. E3 multiplica diez varillas azules por cuatro puntos verdes, luego al resultado, le suma la cantidad de puntos verdes de dos varillas azules y afirma que con cuarenta y ocho puntos azules se pueden formar doce puntos azules exactos (línea N°2). Podemos interpretar que el estudiante, implementa una buena estrategia multiplicativa y aditiva para solución de tareas en base cuatro.

E3 afirma que no sobran puntos verdes porque la multiplicación fue exacta (línea N°3 y 4). Ingresan en la primera casilla el número 12 y en la segunda casilla ingresan el número 0. Llevan el cursor al botón “Terminar” y hacen clic. Aparecen los elementos necesarios (48 puntos verdes y 4 varillas azules), con el letrero que solicita hacer las agrupaciones para verificar la respuesta. Al aparecer las varillas azules E3 se da cuenta de que son más grandes. Empieza a llenar la varilla azul y afirma que se pueden agrupar más puntos

verdes en la misma varilla (línea N°6). E4 dice que se pueden agrupar diez puntos verdes (línea N°7). La pareja agrupa los puntos verdes en las tres varillas azules restantes, luego arrastran las varillas llenas una por una a la casilla azul. Dirige el cursor al botón “Terminar” y hace clic.

Al hacer clic en el botón “Terminar” aparece el letrero emergente que pregunta si las respuestas coinciden. E4 dirige el cursor al botón “No”, hace clic y aparece el letrero emergente que los invita a responder correctamente la tarea. E3 ingresa en la casilla de los puntos azules el número 4 y en la casilla de los puntos verdes que sobran el número 8. E4 afirma *“es como si las verdes fueran las unidades, las azules las decenas y las naranjas las centenas, ¿cierto?”* (línea N°11), E3 le responde que sí y por tanto es más fácil (línea N°12). Identificamos que los estudiantes toman conciencia de la constitución de los puntos en agrupaciones de primer y segundo orden. Lo que lleva a que la pareja plantee una estrategia, relacionando las casillas con el sistema de valor posicional (unidades, decenas y centenas).

### **3.1.2.2.Tarea 2: 27 puntos verdes**

#### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E3 procede a leer el enunciado, dirigen el cursor al botón “Si, responder” y hacen clic. E4 interviene y responde que se forman dos puntos azules y siete puntos verdes (línea N°2), E3 ingresa en la casilla de los puntos azules el número 2 y en la casilla de los puntos verdes que sobran el número 7. Lleva el cursor al botón “Terminar” y hace clic. Se puede interpretar que la pareja utiliza la estrategia de relacionar las casillas con el

sistema de numeración posicional. Por lo que les garantiza una respuesta correcta a la tarea.

Al hacer clic en el botón “Terminar” aparecen los elementos necesarios (27 puntos verdes y 2 varillas azules), con el letrero que solicita hacer las agrupaciones para verificar la respuesta. La pareja agrupa los puntos verdes uno por uno a las dos varillas azules. Luego arrastra las varillas llenas a la casilla azul. Dirigen el cursor al botón “Terminar” y aparece el letrero emergente que pregunta si las respuestas coinciden. E3 toma el ratón y hace clic en el botón “Si”. Aparece el letrero emergente que los invita a escribir la respuesta en el cuaderno y a realizar la siguiente tarea.

### **3.1.2.3.Tarea 3: 23 puntos verdes,**

#### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E4 lee la tarea y deciden anticipar. E3 ingresa en la casilla de los puntos azules el número 2 y en la casilla de los puntos verdes que sobran el número 3. Lleva el cursor al botón “Terminar” y hace clic. Aparecen los elementos necesarios (23 puntos verdes y 2 varillas azules), con el letrero que solicita hacer las agrupaciones para verificar la respuesta. E3 arrastra los puntos verdes uno por uno y llena las dos varillas azules. Luego pasa las varillas agrupadas a la casilla azul. Dirige el cursor al botón “Terminar” y aparece el letrero emergente que pregunta si las respuestas coinciden.

Por último, E4 toma el ratón, dirige el cursor al botón “Si” y hace clic. Podemos identificar que la pareja ya no tiene la necesidad de comunicarse por la interiorización de la estrategia planteada en la verificación de la tarea 1.

### **3.1.2.4.Tarea 4: 20 puntos verdes,**

### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E4 lee la tarea y decide anticipar. E4 ingresa en la casilla de puntos azules el número 2 y en la casilla de puntos verdes número 0. Lleva el cursor al botón “Terminar” y hace clic.

Aparecen los elementos necesarios (20 puntos verdes y 2 varillas azules), con el letrero que solicita hacer las agrupaciones para verificar la respuesta. La pareja realiza el proceso pertinente, agrupando los puntos verdes uno por uno en las dos varillas azules, luego arrastran las varillas llenas una por una a la casilla azul. E4 Dirige el cursor al botón “Terminar” y hace clic, aparece el letrero emergente que pregunta si las respuestas coinciden. Hace clic en el botón “Si” y aparece el letrero emergente que los invita a escribir la respuesta en el cuaderno y a realizar la siguiente tarea.

#### **3.1.2.5.Tarea 5: 88 puntos verdes,**

### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E3 lee la tarea, dirige el cursor al botón “Si, responder”. E4 ingresa en la casilla de puntos azules el número 8 y en la casilla de puntos verdes el número 8. Lleva el cursor al botón “Terminar” y hace clic. Aparecen los elementos necesarios (88 puntos verdes y 8 varillas azules), con el letrero que solicita hacer las agrupaciones para verificar la respuesta. La pareja se divide para agrupar los puntos verdes en las ocho varillas azules. E3 llena cuatro varillas azules con los puntos verdes, luego las arrastra una por una a la casilla azul. E4 realiza el mismo proceso de agrupación, llena las cuatro varillas azules restantes con los puntos verdes y las arrastra una por una a la casilla azul. Dirige el cursor al botón “Terminar” y hace clic. Aparece el letrero emergente que pregunta si las

respuestas coinciden. E3 por último dirige el cursor al botón “Si” y hace clic. Aparece el letrero indicando que la estrategia que utilizaron fue satisfactoria, por lo que pueden pasar a la siguiente figura.

### **Análisis global de la interacción en la secuencia: Automatización de la gestión**

#### **didáctica:**

- *Consciencia del trabajo en diferente base:* En la primera tarea, en el proceso de verificación experimental, los estudiantes toman consciencia de la constitución de los puntos. Al identificar que las agrupaciones ya no son de a cuatro puntos, pero sí de a diez puntos. Lo que permitió que los estudiantes relacionaran los puntos naranjas con las centenas, los puntos azules con las decenas y los puntos verdes con las unidades. Una estrategia de relación e interpretación del funcionamiento del sistema de numeración posicional, debido a que los estudiantes son conscientes que el proceso consiste en hacer grupos de la misma cantidad de elementos cada uno, gracias al proceso de tareas en base 4.
- *Incorporación y refuerzo de la estrategia:* En el desarrollo de las tareas por anticipación, los estudiantes implementan la estrategia de relacionar los dígitos del enunciado con el sistema de numeración posicional, dejando de lado el cálculo y generando de forma inmediata la respuesta. Al entrar en la etapa de verificación los estudiantes dan cuenta que la estrategia es satisfactoria y por tanto se genera un refuerzo de la estrategia.
- *Interiorización de la estrategia:* Los estudiantes al identificar que la estrategia es válida para el desarrollo de las demás tareas, toman la postura de no comunicarse y

de turnarse el escribir por anticipación la solución de cada una de las tareas. Responden de manera inmediata sin la necesidad de hacer ningún cálculo y de forma adecuada. Por lo que concluimos que se genera un aprendizaje por adaptación

### **3.2.Agrupación nivel 2 base 10**

#### **3.2.1. Pareja A: Tareas de agrupación nivel 2:**

##### **3.2.1.1.Tarea 1: 224 puntos verdes**

#### **Síntesis e interpretación de la interacción**

E1 hace lectura de la tarea. E2 dice: *“entonces sería eh... dos naranjas que se formarían, sobrarían dos azules ... y cuatro verdes”* (línea N°2). Deciden resolver la tarea por medio de la anticipación, hacen clic en “Si, responder”. Cuando aparece las casillas de entrada para introducir la respuesta, E2 dice: *“entonces dijimos que... sería así tal cual el número...”* (línea N°2). En esta última afirmación podemos identificar el uso de la representación posicional del número para dar respuesta a la tarea. Se utiliza de nuevo el valor de los dígitos del número de puntos verdes, para saber cuántos puntos naranjas se pueden formar, cuántos puntos azules y cuántos puntos verdes sobran. Así pues, se introduce en las casillas los números correspondientes y avanzan a la etapa de verificación.

E1 dice *“son hartas”* (línea 9). Efectivamente la cantidad de varillas azules (22) y puntos verdes (224) es mucho mayor que cualquier tarea que hayan resuelto hasta ahora. Sin embargo, realizan las agrupaciones respectivas y al finalizar las agrupaciones E2 dice *“entonces ... hay dos naranjas”* [...] *“dos puntos azules”* [...] *“y cuatro verdes”* (línea

Nº12). Terminadas las agrupaciones proceden a contestar la pregunta que confronta las agrupaciones con la respuesta que proporcionaron al anticipar. “*entonces, si...*” (línea Nº12). La respuesta es afirmativa, terminan la tarea y avanzan a la siguiente.

### **3.2.1.2.Tarea 2: 168 puntos verdes**

#### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E2 hace lectura de la tarea y realiza una afirmación sobre la respuesta a la tarea: “*ujum... entonces... siguiendo esto serían ... uno... un naranja, eh... seis azules y ocho verdes*” (línea Nº5). Deciden resolver la tarea por medio de la anticipación, hacen clic en “Si, responder”. Aparece las casillas de entrada para responder a la tarea y E2 vuelve y dice: “***ciento...***” **introduce el número 1 en la primera casilla** “***sesenta y...***” **introduce el número 6 en la segunda casilla** “***ocho...***” **introduce el número 8 en la tercera casilla.** “***listo***” (línea Nº5). Con base en la afirmación de E2 podemos confirmar la estrategia de resolución que plantea la pareja: el uso de la descomposición de los dígitos del número del enunciado para asociarlo a la cantidad de puntos naranjas que se pueden formar, la cantidad de puntos azules y la cantidad de puntos verdes que sobran.

Después de introducir las cantidades en las casillas, la pareja hace clic en “Terminar”. Aparece la etapa de verificación. E2 procede a realizar las agrupaciones “*entonces sería un punto naranja*” (línea Nº7) “*seis azules... y sobran*” (línea Nº9) E1 complementa “*ocho puntos verdes...*” (línea Nº10). Terminadas las agrupaciones contestan la pregunta que confronta la cantidad de puntos en la pantalla y la respuesta que proporcionaron: “*y... si...*” (línea Nº11). Finaliza la tarea y avanzan.

### **3.2.1.3.Tarea 3: 135 puntos verdes**

### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E2 hace la lectura de la tarea. Al terminar hacen clic en el botón “Si, responder”. Aparece la etapa de anticipación, E2 introduce la cantidad en las casillas respectivas de entrada “*listo entonces acá, un punto naranja*” “*eh, tres azules y cinco verdes*” (línea N°1). Interpretamos que la pareja retoma la estrategia de solución asociada al valor posición de cada dígito del número inicial de puntos verdes. Después de introducir la respuesta hacen clic en “Terminar”. Aparece la etapa de verificación. E2 realiza las agrupaciones correspondientes con los elementos en la pantalla: “*entonces, un punto naranja*” [...] “*tres azules*” [...] “*cinco verdes... entonces terminado...*” (línea N°3). Terminadas las agrupaciones, responden la pregunta que confronta el proceso de agrupación en la verificación y la respuesta anticipada: “*si...*” La respuesta es afirmativa, terminan la tarea y avanzan a la siguiente.

#### **3.2.1.4.Tarea 4: 100 puntos verdes**

### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E2 realiza la lectura de la tarea. Hacen clic en el botón “Si, responder”, aparece la etapa de anticipación con las casillas de entrada para responder. E2 realiza una afirmación sobre la respuesta “*entonces... quedarían... un punto naranja*” introduce el número 1, “*y de resto quedarían cero*” (línea N°3). En la tarea actual aparece el número 0 como representación de la ausencia de cantidad, es decir, la imposibilidad de formar elementos azules y verdes. La estrategia de la descomposición de los dígitos impide visualizar la toma de conciencia del significado del cero en las dos últimas casillas, cuando se introducen las cantidades. Sin embargo, la verificación experimental obliga al

estudiante a realizar las agrupaciones respectivas para formar el punto naranja y comprobar que no pueden formarse más puntos azules y que no sobran los puntos verdes. Terminadas las agrupaciones en la etapa de verificación E2 reafirma la respuesta proporcionada “*entonces uno naranja y de resto cero...*” por lo que la respuesta es afirmativa, hacen clic en “Si” y avanzan a la última tarea.

### **3.2.1.5.Tarea 5: 131 puntos verdes**

#### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E2 realiza la lectura de la tarea. E1 escribe la tarea y E2 hace clic en “Si, responder” y dice: “*entonces sería un punto naranja*” [...] “*eh...tres azules*” [...] “*y uno verde*” (línea N°3). En esta parte de la secuencia, dada la eficiencia que ha demostrado la pareja para resolver las tareas por medio de la descomposición de los dígitos del número inicial, hay evidencia del refuerzo de esta estrategia para avanzar en la tarea. Hacen clic en el botón “Terminar”, aparece la etapa de verificación. E2 procede a realizar las agrupaciones con los puntos en la pantalla “*entonces sí, solo queda un punto verde*” “*Quedan, tres azules y una naranja... entonces sí...*”. Termina la etapa de verificación y responde la pregunta que confronta las agrupaciones que acaba de hacer, con la respuesta que anticiparon. La respuesta a la pregunta es afirmativa. Terminan la tarea y la secuencia Aparece el letrero emergente que le indica que la estrategia que ha terminado ha funciona para resolver satisfactoriamente las tareas y que puede avanzar a la siguiente figura.

#### **Análisis global: Automatización de la gestión didáctica**

- *Refuerzo de la estrategia de la descomposición de dígitos relacionados con la cantidad de puntos naranjas, azules y verdes.* La pareja encuentra la relación

entre las centenas y los puntos naranjas, las decenas y los puntos azules, las unidades y los puntos verdes. El valor de la unidad de cada orden se asocia a la cantidad de elementos naranjas, azules y verdes que se pueden formar. Sin embargo, hace falta consolidar la relación bidireccional. Los estudiantes saben que, si descomponen el número del enunciado en sus centenas, decenas y unidades, estos valores le proporcionarían la respuesta correcta y es una estrategia que funciona para resolver las tareas.

- *Adaptación de la estrategia utilizada para resolver tareas del nivel 1 para resolver tareas de nivel 2.* El software realiza una evaluación al terminar cada secuencia. En el nivel 1 la pareja demostró un buen desempeño en la resolución de cada una de las tareas que se proponen. El software reconoce este hecho como un indicio de que hay consolidada una estrategia que permite resolver de manera efectiva las tareas. Por lo tanto, el software le permite avanzar al nivel 2. Podemos observar que la estrategia construida en el primer nivel se adaptó de manera eficiente para poder resolver las tareas del nivel 2 satisfactoriamente. Es una estrategia que les permite anticipar.

### **3.2.2. Pareja B: Tareas de exploración- anticipación**

#### **3.2.2.1.Tarea 1: 413 puntos verdes**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E3 lee la tarea y decide anticipar. E4 afirma que en la tarea ya se utilizan los cientos con la casilla naranja y por lo tanto serían cuatro puntos naranjas, un punto azul y tres puntos verdes (línea N°2). Interpretamos que el estudiante utiliza la estrategia de solución asociada al valor posición de cada dígito, al relacionar los puntos naranjas con las centenas, los puntos azules con las decenas y los puntos verdes con las unidades. E3 escribe en la casilla de puntos naranjas el número 4, en la casilla de puntos azules el número 1 y en la casilla de puntos verdes el número 3. Luego dirige el cursor en el botón “Terminar” y hace clic. Aparecen los elementos necesarios (413 puntos verdes, 41 varillas azules y 4 varillas naranjas), con el letrero que solicita hacer las agrupaciones para verificar la respuesta. E4 se afirma que son muchos puntos y por lo tanto se dividen en realizar el proceso de agrupación (línea N°4). Al terminar las agrupaciones E4 afirma que sí es el resultado (línea N°6), dirigen el cursor al botón “Terminar” y hace clic, aparece el letrero emergente que pregunta si las respuestas coinciden. E3 dirige el cursor al botón “Si”, hace clic y aparece el letrero emergente que los invita a escribir la respuesta en el cuaderno y a realizar la siguiente tarea.

#### **3.2.2.2.Tarea 2: 292 puntos verdes,**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E3 lee la tarea y decide anticipar. Escribe en la casilla de puntos naranjas el número 2, en la casilla de puntos azules el número 9 y en la casilla de puntos verdes el

número 2. Dirige el cursor al botón “Terminar” y hace clic, aparece los elementos necesarios (292 puntos verdes, 29 varillas azules y 2 varillas naranjas), con el letrero que solicita hacer las agrupaciones para verificar la respuesta. La pareja hace el proceso de agrupación paso a paso hasta completarlo. Dirigen el cursor al “Terminar”, hacen clic y aparece el letrero emergente que pregunta si las respuestas coinciden. La pareja lleva el cursor al botón “Si” y hacen clic verificando que su respuesta es correcta. Podemos interpretar que la pareja interioriza la estrategia asociada al valor posición de cada dígito.

### **3.2.2.3.Tarea 3: 109 puntos verdes,**

#### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E4 lee la tarea, dirige el cursor al botón “Si, responder” y hace clic. Escribe en la casilla el de puntos naranjas el número 1, en la casilla de puntos azules el número 0 y en la casilla de puntos verdes el número 9. Dirige el cursor al botón “Terminar”, hacen clic y aparecen los elementos necesarios (109 puntos verdes, 10 varillas azules y 1 varilla naranja), con el letrero que solicita hacer las agrupaciones para verificar la respuesta. La pareja agrupa los puntos verdes en las diez varillas azules, luego arrastran las varillas llenas una por una a la casilla azul. Continúan con agrupar los puntos azules en la varilla naranja, al llenar la varilla la arrastran a la casilla naranja y completan la tarea. Dirigen el cursor al “Terminar”, hacen clic y aparece el letrero emergente que pregunta si las respuestas coinciden. La pareja lleva el cursor al botón “Si” y hacen clic verificando que su respuesta es correcta.

### **3.2.2.4.Tarea 4: 146 puntos verdes,**

### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E3 lee la tarea y decide anticipar. Escribe en la casilla de los puntos naranjas el número 1, en la casilla de puntos azules el número 4 y en la casilla de puntos verdes el número 6. Dirige el cursor al botón “Terminar” y hace clic, aparece los elementos necesarios (146 puntos verdes, 14 varillas azules y 1 varilla naranja) para que los estudiantes realicen el proceso de agrupación y verificar la respuesta. La pareja se divide en agrupar los puntos verdes en las varillas azules, arrastran las varillas azules llenas una por una a la casilla azul, luego agrupan los puntos azules en la varilla naranja hasta que quede llena y la arrastran a la casilla naranja. La pareja verifica que las respuestas coinciden.

#### **3.2.2.5.Tarea 5: 150 puntos verdes**

### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E3 lee la tarea y la soluciona por anticipación de manera correcta. Escribe en la casilla de los puntos naranjas el número 1, en la casilla de puntos azules el número 5 y en la casilla de puntos verdes el número 0. Hacemos la hipótesis que el estudiante termina con las tareas satisfactoriamente, consecuencia de la interiorización de la estrategia asociada al valor posición de cada dígito. La pareja realiza el proceso de agrupación y verifica que las respuestas coinciden. Aparece el letrero emergente que les indica que la estrategia que utilizaron es adecuada y los invita a realizar la siguiente figura.

### **Análisis global de la interacción en la secuencia: Automatización de la gestión**

#### **didáctica:**

- *Incorporación de la estrategia:* En el desarrollo de la primera tarea solucionada por anticipación de forma correcta, el estudiante E4 relaciona la casilla naranja con las centenas. Lo que permite que incorpore la estrategia de relación e interpretación del funcionamiento del sistema de numeración posicional, utilizada en las tareas de nivel uno base diez. Esta estrategia relaciona los dígitos del enunciado con el sistema de numeración posicional, dejando de lado el cálculo y generando de forma inmediata la respuesta.
- *Refuerzo e interiorización de la estrategia:* Los estudiantes al identificar que la estrategia es óptima para la solución de las tareas, toman la postura de no comunicarse y de turnarse el escribir por anticipación la solución de cada una de las tareas de forma correcta. Hacemos la hipótesis que esto se genera, gracias a la etapa de verificación, por lo que se refuerza la estrategia y a su vez se cumple un aprendizaje por adaptación.

### **3.3.Desagrupación nivel 1: Análisis tareas de exploración- anticipación (base 10)**

#### **3.3.1. Pareja A: Tareas de desagrupación nivel 1:**

##### **3.3.1.1.Tarea 1: 7 puntos azules y 1 punto verde**

#### **Síntesis e interpretación de la interacción**

E1 hace lectura de la tarea, E2 realiza una afirmación sobre la posible respuesta *“pues setenta y uno, setenta y uno porque sería siete por diez que serían setenta”* [...] *“y uno verde serían setenta y uno. Entonces...”* (líneas N°2 y N°4). En la afirmación de E2 podemos observar que utiliza de nuevo la multiplicación como estrategia de conteo para realizar las desagrupaciones. Podemos interpretar que es consciente que cada punto azul representa un grupo de diez y por lo tanto para conocer cuántos puntos verdes hay en 7 puntos azules, la multiplicación del número de puntos azules por el número de puntos verdes contenidos en cada uno, le permite saber la respuesta. Además, tiene en cuenta que debe sumar un punto extra de acuerdo a lo que dice el enunciado.

E1 decide resolver la tarea por medio de la anticipación. Introduce la cantidad correspondiente al resultado de los cálculos ejecutados. Luego hace clic en el botón “Terminar”, aparece la etapa de verificación. E1 realiza las desagrupaciones respectivas con los elementos que aparecen en la pantalla. Utiliza la herramienta “x” de desagrupación con cada uno de los puntos que pasa de la casilla azul a la verde. Termina la verificación y contesta la pregunta que confronta el resultado de las desagrupaciones con la respuesta que proporcionaron. E1 hace clic en “Si”, afirma que si hay correspondencia entre estos resultados. Avanza a la siguiente tarea.

##### **3.3.1.2.Tarea 2: 2 puntos azules y 7 puntos verdes**

### **Síntesis e interpretación de la interacción**

E1 hace la lectura de la tarea y dice de inmediato “*Entonces dos por diez veinte, y siete*” (línea N°1) E2 complementa “*y otros siete veintisiete*” (línea N°2). Podemos ver que E1 utiliza la estrategia de la multiplicación que E2 utilizó en la primera tarea, dado que ha funcionado para responder el enunciado correctamente. Se puede identificar un refuerzo de la estrategia por parte de las dos estudiantes. E1 decide resolver la tarea por medio de la anticipación, introduce la cantidad que corresponde a los cálculos anteriores. Luego hace clic en el botón “Terminar”, aparece la etapa de verificación, E1 realiza las desagrupaciones y dice: “*veinte que son los que están agrupados y siete que son los sobrantes*” (línea N°5). Interpretamos que en la verificación E1 afianza el reconocimiento de los elementos unitarios contenidos en el número de puntos azules y verdes. Terminan la etapa de verificación y responde la pregunta que confronta el resultado de las desagrupaciones, con la respuesta que proporcionaron. Responde afirmativamente y terminan la tarea.

#### **3.3.1.3.Tarea 3: 2 puntos azules**

### **Síntesis e interpretación de la interacción**

E1 realiza la lectura de la tarea y dice de inmediato “*mmm veinte...*” (línea N°1) [...] “*veinte, porque dos y los dos por diez*”. Observamos que retoma la multiplicación para sustentar la respuesta a la tarea. Identificamos un refuerzo nuevamente de la estrategia multiplicativa de conteo para resolver la tarea. Posterior a las afirmaciones de E1 hacen clic en “Si, responder”. Aparece la etapa de anticipación, E1 introduce el número 20 en la casilla de entrada. Luego hace clic en el botón “Terminar”. Aparece la

etapa de verificación. Se realizan las desagrupaciones correspondientes realizando afirmaciones sobre los grupos contenidos en los dos puntos azules: “*diez...*” [...] “*y diez, veinte... listo*” (línea N°13). Termina la etapa de verificación y responden a la pregunta que confronta los resultados de las desagrupaciones y la respuesta que anticiparon. La respuesta es afirmativa, se termina la tarea y avanzan a la siguiente.

#### **3.3.1.4.Tarea 4: 4 puntos azules y 7 puntos verdes**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción**

E1 hace lectura de la tarea, E2 realiza una afirmación de inmediato sobre la posible respuesta “*serían cuarenta y siete*” (línea N°2). La respuesta se proporciona de manera espontánea, aunque no aparece la verbablización de los cálculos, podemos identificar que la estudiante tiene conciencia sobre la cantidad de puntos que hay en cuatro puntos azules, teniendo en cuenta el referente cardinal que precisa cada grupo, en este caso diez. También diferencia las clases de elementos (puntos azules y puntos verdes), posterior a la descomposición de los grupos añade la cantidad de elementos unitarios al resultado para obtener la respuesta final.

Deciden resolver la tarea por medio de la anticipación. Hacen clic en “Si, responder”, aparece la casilla de entrada. E1 introduce la cantidad de puntos resultado del cálculo anterior y hace clic en el botón “Terminar”. Aparece la etapa de verificación, E1 realiza la desagrupaciones y hace un conteo secuenciado que acompaña las acciones en esta etapa “*veinte... treinta...*” (línea N°7) “*y con el otro cuarenta*” (línea N°8) “*cuarenta... más los siete*” (línea N°9). Terminada la desagrupación proceden a responder la pregunta que confronta la respuesta que proporcionaron con las

desagrupaciones que ejecutaron en la etapa de verificación. La respuesta es afirmativa.

Terminan con la tarea.

### **3.3.1.5.Tarea 5: 4 puntos azules**

#### **Síntesis e interpretación de la interacción.**

E1 hace lectura de la tarea. E1 y E2 hablan de inmediato y al tiempo, al terminar la lectura. E1: *Pues.... cuarenta*” E2: *“cuarenta”*. Interpretamos esta afirmación unánime como resultado de los cálculos de la tarea anterior. En este momento de la secuencia la pareja cuenta con un referente consolidado que les permite hablar con mayor claridad sobre las respuestas a las preguntas.

Deciden resolver la tarea por medio de la anticipación. Hacen clic en “Si, responder”, aparece la casilla de entrada. E1 introduce la cantidad de puntos resultado del cálculo anterior y hace clic en el botón “Terminar”. Aparece la etapa de verificación, E1 dice *“ay si, mira ahí están los cuatro puntos”* (línea N°5) E2 complementa *“que serían cuarenta”* (línea N°6). E1 realiza las desagrupaciones, pasa cada uno de los puntos azules de la casilla azul a la casilla verde. Terminada la desagrupación proceden a responder la pregunta que confronta la respuesta que proporcionaron con las desagrupaciones que ejecutaron en la etapa de verificación. La respuesta es afirmativa. Terminan con la tarea.

#### **Análisis global de la interacción: Automatización de la gestión didáctica**

- *Evidencia de la interiorización del proceso de descomposición.* Podemos observar que el desempeño de los estudiantes en las tareas demuestra comprensión sobre el proceso de descomposición. Se puede identificar consciencia sobre la naturaleza de los elementos de las tareas. Los estudiantes pueden discriminar los grupos

- (puntos azules) de los elementos unitarios (puntos verdes), lo que les permite realizar afirmaciones sobre la respuesta de manera eficiente. La etapa de verificación permite validar y reforzar los procesos de descomposición mental que realizan las estudiantes cuando resuelven las tareas por medio de la anticipación.
- *Afianzamiento de estrategias construidas en la interacción con las tareas en base 4:* Podemos identificar que las estudiantes logran adaptar la estrategia multiplicativa utilizada en las tareas en base 4 para poder resolver eficientemente las tareas actuales. Podemos afirmar que las estudiantes son conscientes de que las tareas comparten una estructura que trabaja bajo un cardinal referente (base). Este referente condiciona la cantidad de puntos que puede haber por grupo y permite realizar afirmaciones sobre la cantidad de elementos unitarios que hay en determinados puntos azules.
  - *Anticipación como primera opción para resolver las tareas:* En el desarrollo de la secuencia podemos observar que las estudiantes optan por resolver todas las tareas por medio de la anticipación, lo que muestra que las estudiantes poseen una estrategia funcional que les permite realizar afirmaciones sobre la respuesta sin necesidad de explorar. Efectivamente fue posible resolver las tareas valiéndose de las estrategias que se consolidaron en tareas anteriores.

Sin embargo, no hay evidencias de la toma de conciencia de la posibilidad de encontrar la respuesta simplemente ‘juntando’ los dos dígitos del enunciado. A pesar de que en los ejercicios de agrupación los estudiantes habían tomado conciencia de que podían descomponer los dígitos del número del enunciado para responder las preguntas, en estos

ejercicios de desagrupación aparentemente los estudiantes utilizan la estrategia multiplicativa para anticipar el número de puntos azules y de puntos verdes.

### **3.3.2. Pareja B: Tareas de exploración- anticipación**

#### **3.3.2.1.Tarea 1: 3 puntos azules y 8 puntos verdes**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E4 lee la tarea y decide anticipar. E3 afirma que la tarea esta fácil y dice que la respuesta es treinta y ocho (línea N°2). E4 afirma que E3 tiene razón porque es treinta más ocho (línea N°3). Interpretamos que la pareja utiliza una estrategia aditiva siendo conscientes de la constitución de los puntos. Lo que permite que los estudiantes de manera rápida interpreten que; treinta puntos verdes (tres puntos azules), más ocho puntos verdes da un total de treinta y ocho puntos verdes.

E3 ingresa en la casilla el número 38, lleva el cursor al botón “Terminar” y hace clic. Aparece los elementos necesarios (3 varillas azules y 8 puntos verdes), con el letrero que solicita hacer las desagrupaciones para verificar la respuesta. E4 arrastra los puntos azules uno por uno a la casilla verde, hace clic en la “x” de cada varilla azul, los puntos verdes se separan de las varillas azules, E4 cuenta la cantidad de puntos verdes en la pantalla y afirma que hay treinta y ocho (línea N°5). La pareja decide llevar el cursor al botón “Terminar” y hace clic, aparece el letrero emergente que pregunta si las respuestas coinciden. Dirigen el cursor al botón “Si”, hacen clic y aparece el letrero emergente que los invita a escribir la respuesta en el cuaderno y a realizar la siguiente tarea.

#### **3.3.2.2.Tarea 2: 6 puntos azules y 7 puntos verdes**

### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E4 lee la tarea y decide anticipar. E4 ingresa en la casilla el número 67, luego dirige el cursor al botón “Terminar”, hace clic y aparecen los elementos necesarios (6 varillas azules y 7 puntos verdes), con el letrero que solicita hacer las desagrupaciones para verificar la respuesta. La pareja se divide en hacer el proceso de desagrupación, E3 arrastra uno por uno los tres puntos azules a la casilla verde, hace clic en la “x” de cada varilla azul llena y desagrupa los puntos verdes. E4 realiza el mismo proceso, arrastra los tres puntos azules restantes a la casilla verde, hace clic en la “x” de cada varilla azul llena y desagrupa los puntos verdes. La pareja decide llevar el cursor al botón “Terminar” y hace clic, aparece el letrero emergente que pregunta si las respuestas coinciden. Dirigen el cursor al botón “Si”, hacen clic y aparece el letrero emergente que los invita a escribir la respuesta en el cuaderno y a realizar la siguiente tarea. Podemos identificar que la pareja en esta tarea, no tienen la necesidad de dialogar entre los dos para dar la solución. Interpretamos este hecho como una interiorización de la estrategia en ambos estudiantes.

### **3.3.2.3.Tarea 3: 9 puntos azules y 2 puntos verdes**

### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E4 lee la tarea, dirige el cursor al botón “Si, responder” y hace clic. E3 ingresa en la casilla el número 92, hace clic en “Terminar” y aparecen los elementos necesarios (9 varillas azules y 2 puntos verdes), con el letrero que solicita hacer las desagrupaciones para verificar la respuesta. La pareja se divide en realizar las desagrupaciones pertinentes, E4 arrastra cinco puntos azules uno por uno a la casilla verde, hace clic en la “x” de cada varilla azul y desagrupa los puntos verdes de las varillas azules. E3 arrastra los cuatro

puntos azules restantes a la casilla verde, hace clic en la “x” de cada varilla azul y desagrupa los puntos verdes de las varillas azules. E3 no hace conteo de los puntos en la pantalla y afirma que sabe que hay noventa y dos puntos (línea N°4). Interpretamos que el estudiante está seguro de la estrategia que implementa para llegar a la solución por lo que no tiene la necesidad de hacer el conteo de los puntos.

E3 decide llevar el cursor al botón “Terminar” y hace clic, aparece el letrero emergente que pregunta si las respuestas coinciden. Dirigen el cursor al botón “Si”, hacen clic y aparece el letrero emergente que los invita a escribir la respuesta en el cuaderno y a realizar la siguiente tarea.

#### **3.3.2.4.Tarea 4: 3 puntos azules y 7 puntos verdes**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E3 lee la tarea, dirige el cursor al botón “Si, responder” y hace clic. E3 ingresa la casilla el número 37. Lleva el cursor al botón “Terminar”, hace clic y aparece los elementos necesarios (3 varillas azules y 7 puntos verdes), con el letrero que solicita hacer las desagrupaciones para verificar la respuesta. E4 arrastra los tres puntos azules uno por uno a la casilla verde, E3 toma el ratón y hace clic en la “x”, en cada varilla azul llena, los puntos verdes se desagrupan de las varillas azules. Dirige el cursor al botón “Terminar” y hace clic.

Aparece el letrero emergente que pregunta si las respuestas coinciden. Dirigen el cursor al botón “Si”, hacen clic y aparece el letrero emergente que los invita a escribir la respuesta en el cuaderno y a realizar la siguiente tarea.

#### **3.3.2.5.Tarea 5: 4 puntos azules y 8 puntos verdes**

### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E3 lee la tarea y decide anticipar. E4 ingresa en la casilla el número 48, dirige el cursor al botón “Terminar” y hace clic. Aparece los elementos necesarios (4 varillas azules y 8 puntos verdes), con el letrero que solicita hacer las desagrupaciones para verificar la respuesta. La pareja se divide el proceso de desagrupación, E3 arrastra dos puntos azules uno por uno a la casilla verde, luego hace clic en la “x” de cada varilla azul llena y los puntos verdes se desagrupan de las varillas azules. Le pasa el ratón a E4 y realiza el mismo proceso, arrastra los dos puntos azules restantes uno por uno a la casilla verde, hace clic en la “x” de cada varilla azul llena y los puntos verdes se separan de las varillas azules. Dirige el cursor al botón “Terminar” y hace clic, aparece el letrero emergente que pregunta si las respuestas coinciden. Dirigen el cursor al botón “Si”, hacen clic y aparece el letrero indicando que la estrategia que utilizaron fue satisfactoria, por lo que pueden pasar a la siguiente figura.

### **Análisis global de la interacción en la secuencia: Automatización de la gestión didáctica:**

- *Incorporación de la estrategia:* En el desarrollo de la primera tarea por anticipación, el estudiante E3 implementa la estrategia de relacionar los dígitos del enunciado con el sistema de numeración posicional de forma correcta. E4 argumenta la respuesta de E3 a partir de la suma de la constitución de cada punto. Relaciona tres puntos azules con el dígito treinta y ocho puntos verdes con el dígito ocho. En los demás ejercicios parecen utilizar la misma estrategia

- *Interiorización de la estrategia:* Los estudiantes toman la postura de no comunicarse y de turnarse el escribir por anticipación la solución de cada una de las tareas. Responden de manera inmediata las cinco tareas correctamente sin la necesidad de hacer cálculos. Interpretamos que los estudiantes han interiorizado la estrategia.

Sin embargo, no hay evidencias de la toma de conciencia de la posibilidad de encontrar la respuesta simplemente ‘juntando’ los dos dígitos del enunciado. A pesar de que en los ejercicios de agrupación los estudiantes habían tomado conciencia de que podían descomponer los dígitos del número del enunciado para responder las preguntas, en estos ejercicios de desagrupación aparentemente los estudiantes utilizan la estrategia multiplicativa para anticipar el número de puntos azules y de puntos verdes.

### **3.4.Desagrupación nivel 2 (base 10)**

#### **3.4.1. Pareja A: Tareas de desagrupación base 10: Nivel 2**

##### **3.4.1.1.Tarea 1: 1 punto naranja**

#### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E1 hace la lectura de la tarea y realiza una afirmación inmediatamente sobre la posible respuesta “*cuatro*” (línea N°1) “*cuatro por cuatro ... dieciséis...*” (línea N°3). Interpretamos en la afirmación de E1 que hace referencia al ejercicio realizado en base cuatro, sin embargo, no tiene presente que ahora la base ha cambiado. E1 pregunta “¿*de qué se compone un punto naranja?*” (línea N°7) E2 responde: “*Se compone de diez azules*” (línea N°8) E1 complementa: “*y cada uno de los diez azules tiene diez verdes. Diez por diez...*” (línea N°9) E2 responde: “*serían cien...*”. Podemos observar que fruto de la discusión entre E1 y E2 se esclarece un método de solución concreto que inicia por la reflexión de E2 sobre la cantidad de puntos azules que tiene un punto naranja, que luego E1 complementa haciendo uso de una multiplicación para reconocer la cantidad total de puntos verdes que hay en un punto naranja. La pareja retoma la estrategia multiplicativa para resolver la situación.

E1 toma la decisión de resolver la tarea por medio de la anticipación, así que hace clic en “Si, responder”. En la etapa de anticipación, introducen el número 100 en la casilla de entrada, asumimos que es producto de la discusión en el apartado anterior. E1 después de introducir el número decide terminar la tarea. Aparece la etapa de verificación con un punto naranja en la casilla naranja. E1 afirma “*Sí, acá tocaría desagruparlos...*”. Interpretamos que el estudiante ya es consciente de la función de la verificación y cuáles

son las acciones que se espera, lleve a cabo durante esta etapa. E1 realiza todas las desagrupaciones posibles, conforme lleva cada elemento a la casilla verde hace un conteo por múltiplos de diez: “*acá irían veinte*”, “*treinta*”, “*sesenta*”, “*ochenta*”, “*noventa...y pues los cien*”. Por último, hace clic en “Terminado”. Aparece la pregunta que confronta la respuesta que proporcionaron, con las desagrupaciones que acaba de hacer. La respuesta es afirmativa, escriben respuesta de la tarea y avanzan a la siguiente

#### **3.4.1.2.Tarea 2: 2 puntos naranjas, 5 puntos azules y 1 punto verde**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción**

E1 realiza la lectura de la tarea y dice: “*Entonces dos puntos naranjas se componen de*” (línea N°1) [...] “*de veinte puntos azules*” (línea N°3), E2 dice “*espera*” (línea N°4), E1 continúa “*los cinco puntos azules se componen de cincuenta puntos verdes, cuántos puntos verdes necesito...*” (línea N°5). E2 vuelve realizar afirmaciones con cálculos más contundentes “*veinte puntos azules sería diez por veinte. Diez por veinte serían doscientos, si, diez por veinte, doscientos, ehh entonces serían doscientos puntos azules ...y uno verde...Espera sería doscientos puntos verdes para formar los dos puntos naranjas y uno verde que llevábamos sería igual a doscientos uno*” (línea N°8). Podemos observar que los cálculos de E1 en la línea 5 y los cálculos de E2 en la línea 8, son correctos y se complementan, sin embargo, no se tienen en cuenta en conjunto para resolver la situación. E1 hace clic en “Si, responder” y coloca en la casilla de entrada la respuesta que proporciona E2 “*doscientos uno*”. Podemos observar aquí que hubo dificultades para escuchar los aportes del otro y se decide optar por el cálculo más elaborado para responder la tarea.

Introducida la cantidad en la casilla de entrada, E1 hace clic en “Terminar”.

Aparece la etapa de verificación, E1 procede a realizar las desagrupaciones (línea N°9) sin embargo, solo realiza las desagrupaciones que corresponde a los elementos de los puntos naranjas. Desagrupa los puntos azules de las dos varillas naranjas (haciendo uso de la “x”), quedan veinte puntos azules que luego pasan a la casilla verde (aún quedan 5 puntos azules en la casilla azul). Realizan el conteo en conjunto de las varillas azules en múltiplos de diez hasta completar doscientos (final línea N°9) E2 complementa “*y otro verde que había ... doscientos uno, entonces sí*” (línea N°10). E1 decide terminar la etapa de verificación y hace clic en “Terminado”, inmediatamente, aparece la retroacción didáctica del letrero emergente que le indica que aún no ha realizado todas las desagrupaciones (línea N°11). E1 dice “*de pronto nos falta agrupar estas... ¿De pronto no?*” y señala los puntos azules que se encuentran en la casilla azul. Arrastra los cinco puntos azules a la casilla verde y los organiza a un lado de las demás varillas. Podemos observar que la retroacción didáctica tuvo el efecto esperado puesto que llamó la atención del estudiante para que reconsiderara la respuesta de acuerdo a las desagrupaciones.

Después vuelve a hacer clic en “Terminado”. Aparece la pregunta que confronta la respuesta que proporcionaron y las desagrupaciones que acaban de hacer. E1 hace clic de inmediato en “Si”, aparece la retroacción didáctica del letrero que lo invita a revisar las cantidades y las desagrupaciones que se hicieron (línea N°15). E2 realiza de nuevo el conteo de diez en diez “*veinte, treinteta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta, noventa, cien, ciento diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta, noventa y doscientos, diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta y sesenta, sesenta y uno*”

(línea N°16). De acuerdo con la situación de la tarea observamos que la pareja hace un conteo erróneo, se exceden por diez unidades. Interpretamos que la falla en el conteo se debe a la cantidad de varillas que deben contar, pues es mucho mayor que la cantidad en base 4. E1 complementa “*doscientos sesenta y uno*” (línea N°17), E2 dice “*entonces dale que no...*” (línea N°18) E1 hace clic en “No”, aparece la retroacción didáctica que lo felicita y lo invita a corregir la respuesta (línea N°19). E2 insiste “*serían doscientos sesenta y uno*” (línea N°20). E1 introduce la cantidad 261 en la casilla y hace clic en “terminar”. Aparece la retroacción didáctica que invita a revisar las desagrupaciones que han realizado. La retroacción didáctica tuvo un efecto distinto en la estudiante puesto que, aunque la invita a revisar lo que ha hecho experimentalmente, E2 procede a realizar una acción relacionada con el proceso de anticipación, dice: “*en veinte llevaríamos doscientos, y otros cinco ... cincuenta, doscientos cincuenta y uno...*” (línea N°24). Interpretamos que la verificación experimental reforzó la estrategia que utiliza en sus afirmaciones y acciones anteriores lo que permite que la respuesta sea la indicada. E1 introduce la cantidad 251 en la casilla y hace clic en “Terminar”, aparece el letrero que lo invita a escribir la respuesta en el cuaderno y a avanzar a la siguiente tarea.

### **3.4.1.3.Tarea 3: dos puntos naranjas y dos puntos azules**

#### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E1 realiza la lectura de la tarea, E2 dice “*espérate hacemos la suma con más calma...*” [...] “*dos naranjas equivalen a...*” (línea N°2) E1 complementa: “*veinte...*”. En las líneas 4, 5 y 6 se complementan E1 y E2 para realizar algunos cálculos y encontrar algunas equivalencias. Sin embargo, la discusión es un poco confusa por lo que E2

sugiere: “*Si quieres le damos en “crear y responder” para estar seguras*” (línea N°8), luego hace clic en “No, crear y responder”. Aparece la etapa de exploración. E1 toma el ratón, E2 le sugiere “*entonces ahí saca dos naranjas*” (línea N°10) E1 crea dos puntos naranjas con el distribuidor. Luego E2 se afirma de nuevo “*dos... listo... entonces ahora dice que otros dos azules... entonces dale en dos azules...*” (línea N°14). E1 crea dos puntos azules con el distribuidor. E1 crea un punto verde, sin embargo, E2 aclara “*acá...y ninguno de verdes...*” (línea N°16) le sugiere utilizar la “*basura*” para eliminar el punto. De acuerdo a las acciones realizadas hasta el momento en la fase de exploración podemos interpretar que E1 y E2 son conscientes del funcionamiento de cada una de las herramientas de esta fase.

E1 dice “*serían veinte... veinte azules... pues...*” (línea N°21) y arrastra los dos puntos naranjas creados, de la casilla naranja a la casilla azul. E1 continúa “*veinte azules, veintiuno, veintidós... con estos*” (línea N°23). Observamos que ahora se tiene presente la totalidad de puntos azules, interpretamos que el cambio de conducta en el conteo se debe a la verificación experimental de la tarea anterior. E2 dice ahora “*veintidós azules...y veintidós por*” (línea N°24) E1 complementa “*veintidós por diez*” (línea N°25), E2 responde E2: “*doscientos veinte...*”. Observamos que el proceso de desagrupación llega hasta la casilla azul, la pareja únicamente necesita saber cuántos puntos azules hay en total, puesto que después, optan por utilizar la estrategia multiplicativa para establecer la cantidad de puntos verdes que necesitan, estrategia que funciona para resolver la tarea.

E1 introduce la cantidad 220 en la casilla de entrada y hace clic en “Terminar”. Aparece la etapa de verificación. E1 procede a realizar las desagrupaciones, intenta

desagrupar a la fuerza los puntos azules de la varilla naranja. Sin embargo, abandona la acción y procede a utilizar la herramienta “x” desagrupación que se encuentra en la varilla. E1 termina de pasar todas las varillas azules a la casilla verde y dice “*si quieres, ve contándolos...*” (línea N°37) E2 procede a hacer el conteo, señala con un lápiz todas las varillas azules. E1 interrumpe el conteo “*sin embargo, ya lo hicimos en el ejercicio anterior...*” (línea N°39). Interpretamos que E1 asume el proceso de exploración como una verificación experimental que les permite llegar a la respuesta por lo que no ve necesario repetir el proceso en la etapa actual (verificación).

E1 hace clic en el botón “Terminado” y aparece el letrero que confronta la respuesta que proporcionaron y las desagrupaciones que realizaron en la verificación. La respuesta es afirmativa. Aparece el letrero que les felicita, les invita a escribir la respuesta en el cuaderno y a avanzar de tarea.

#### **3.4.1.4.Tarea 4: 1 punto naranja, 7 puntos azules y 8 puntos verdes**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E2 hace lectura de la tarea y dice “*un punto naranja serían diez azules*” (línea N°1) “*entonces...serían en total diecisiete puntos azules...*” (línea N°3) “*y diecisiete por...*” E1 complementa “*por diez sería ...*” (línea N°6) E2 responde “*ciento setenta*” (línea N°7) “*más ocho, ciento setenta y ocho...*” (línea N°9). Observamos que se aplica la estrategia construida en la tarea anterior, que consiste en contar la cantidad total de puntos azules haciendo uso de las equivalencias, punto naranja-puntos azules y multiplicar dicha cantidad por diez.

E1 escribe la pregunta de la tarea. E2 decide hacer clic sobre “Si, responder”. Aparece la etapa de anticipación, E2 introduce el número 178 en la casilla de entrada. Luego hace clic en “Terminar” y aparece la etapa de verificación. Procede a realizar las desagrupaciones hasta la casilla verde, sin embargo, no desagrupa los puntos verdes de las varillas azules. E1 afirma “*no hay necesidad de desagruparlos*” (línea N°14). E1 dice “*uno, dos, tres, cuatro...si está bien ciento setenta y ocho*” (línea N°16) incluso reafirma “*sí, ya lo verifiqué*” (línea N°18). Mientras E2 realiza el proceso de desagrupación E1 realiza el proceso de conteo y verificación interpretamos, con el fin de responder de manera eficiente la pregunta que confronta la respuesta que proporcionaron y las desagrupaciones. E2 hace clic en el botón “Terminado” y responde afirmativamente la pregunta que relaciona la respuesta que dieron al iniciar la tarea, con la verificación experimental. Aparece el letrero que lo felicita y lo invita a avanzar a la siguiente tarea.

#### **3.4.1.5.Tarea 5: 1 punto naranja, 9 puntos azules y 9 puntos verdes**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E2 realiza la lectura de la tarea y realiza una afirmación de inmediato haciendo cálculos de manera rápida: “*un punto naranja, diez azules...diecinueve puntos azules por diez, diecinueve por diez ciento noventa... más nueve, ciento noventa y nueve...*”

Podemos interpretar que E2 tiene totalmente interiorizada la estrategia de solución, por lo que puede hablar eficientemente sobre la posible respuesta. E1 por su parte escribe en el cuaderno la pregunta y la respuesta. E2 hace clic en “Si, responder”, e introduce la cantidad 199 en la casilla de entrada. Procede a hacer clic en “Terminar”, aparece la etapa de verificación. E2 procede a realizar las desagrupaciones y ordena en la casilla verde el

conjunto de varillas azules con los puntos verdes agrupados. Podemos interpretar que las estudiantes comprenden que el proceso de verificación termina cuando no hay elementos azules en la casilla azul (en el caso de la desagrupación). E2 hace clic en el botón “Terminado” y aparece la pregunta que confronta la respuesta que proporcionaron con las desagrupaciones. Procede a responder afirmativamente, aparece el letrero que les felicita, les invita a escribir la respuesta en el cuaderno y a avanzar de tarea.

#### **3.4.1.6.Tarea 6: 1 punto naranja, 1 punto azul y 1 punto verde**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción**

E2 realiza la lectura de la tarea y realiza una afirmación inmediatamente sobre la respuesta “*Entonces uno naranja sería igual a diez azules serían en total, once puntos azules, once por diez, ciento diez*” (línea N°1). E1 escribe la pregunta y la respuesta en el cuaderno. E2 hace clic sobre el botón “Si, responder”, aparece la etapa de anticipación y dice “*serían ciento once*” (línea N°3) introduce el número en la casilla de entrada.

Procede a hacer clic en el botón “Terminar”. Aparecen los puntos que indica la tarea, sin embargo, lleva a las estudiantes al escenario donde aparece el letrero que les indica en concreto que la estrategia utilizada ha funcionado correctamente y que han terminado la secuencia de tareas.

##### **Análisis global: Automatización de la gestión didáctica:**

- *Efecto de la etapa de verificación en la decisión de explorar antes de anticipar.*

La primera tarea propone un ejercicio que involucra una única clase de puntos (naranjas), interpretamos que, dada esta situación, no hubo dificultades para resolver la tarea por medio de la anticipación, debido a que los cálculos se concentran en encontrar las

equivalencias de la cantidad de puntos verdes para un solo punto naranja. Sin embargo, la segunda tarea involucra tres clases de puntos (naranjas, azules y verdes) lo que interpretamos como un incremento en la dificultad para anticipar, que se ve reflejada en la respuesta que proporcionan en esta tarea. Tuvieron que valerse de la etapa de verificación para darse cuenta del error cometido en la solución propuesta. Al comenzar la tercera tarea, E2 sugiere “*para estar seguras*” (línea N°8 tarea 3) responder la tarea por medio de la exploración. Interpretamos esta decisión fruto de la verificación experimental que llevaron a cabo en la tarea 2.

*-Uso de la etapa de exploración para construir una estrategia de anticipación.* La pareja resuelve la tarea 3 por medio de la exploración. La estrategia que tenía la pareja, previo a esta tarea, consistía en contar la cantidad total de puntos azules, multiplicarlo por diez, y luego, de ser necesario, sumar la cantidad de puntos verdes. El problema que identificamos en la resolución de las situaciones en las tareas 2 y 4, radicaba en que no se tenían presentes la cantidad total de puntos azules para luego aplicar el método que habían utilizado y que funcionaba. Sin embargo, la etapa de verificación en las tareas 2 y 4, y la exploración en la tarea 3, les permite reconocer la importancia de identificar la cantidad total de puntos azules para luego aplicar el método que venían utilizando para resolver las tareas. En las tareas 5 y 6 toman la decisión de anticipar. Podemos observar que, luego de la lectura de las tareas, las primeras afirmaciones de E2 se concentran en reconocer la cantidad total de puntos azules: “*un punto naranja, diez azules...diecinueve puntos azules por diez, diecinueve por diez ciento noventa... más nueve, ciento noventa y nueve...*” (línea N°1 tarea 5) *Entonces uno naranja sería igual a diez azules serían en*

*total, once puntos azules, once por diez, ciento diez*” (línea N°1 tarea 6). Podemos observar en las afirmaciones contundencia respecto a la estructura que debe tener el método de solución para proporcionar eficientemente la respuesta.

Nuevamente, no hay evidencias de la toma de conciencia de la posibilidad de encontrar la respuesta simplemente ‘juntando’ los dos dígitos del enunciado. A pesar de que en los ejercicios de agrupación los estudiantes habían tomado conciencia de que podían descomponer los dígitos del número del enunciado para responder las preguntas, en estos ejercicios de desagrupación aparentemente los estudiantes utilizan la estrategia multiplicativa para anticipar el número de puntos azules y de puntos verdes.

### **3.4.2. Pareja B: Tareas de exploración- anticipación**

#### **3.4.2.1.Tarea 1: 3 puntos naranjas, 2 puntos azules y 5 puntos verdes.**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E4 lee la tarea y E3 afirma que tres son trescientos, entonces el resultado es trescientos veinticinco (línea N°2). Interpretamos que el estudiante es consciente de la constitución del punto naranja y plantea la estrategia de relación y funcionalidad del sistema de valor posicional. Al identificar que tres puntos naranjas están constituidos por trescientos puntos verdes, más la cantidad de puntos verdes conformados por los dos puntos azules (veinte puntos verdes), más los cinco puntos verdes. E3 decide anticipar, escribe en la casilla el número 325 y hace clic en terminar para entrar a la etapa de verificación experimental.

La pareja se divide en realizar el proceso de desagrupación de forma adecuada, arrastran todos los puntos a la casilla izquierda, utilizan la herramienta “x” hasta que los puntos verdes quedan desagrupados en la casilla verde. E3 al ver la cantidad de puntos verdes afirma que son muchos puntos, que él sabe que está bien (línea N°6). E4

interviene para argumentar y afirmar que la respuesta de E3 es adecuada, “... *porque trescientos, más veinte, más cinco... trescientos veinticinco...*” (línea N°7). Identificamos que tanto E3 y E4 implementan la misma estrategia de relación y función del sistema de valor posicional para argumentar la respuesta.

E4 invita a E3 a que haga clic en el botón “Terminar” y luego en el botón “Si”, esto sin realizar el conteo de los puntos en la pantalla (línea N°7). Hacemos la hipótesis que los estudiantes depositan su confianza en la estrategia implementada a tal punto de no verificar la cantidad de puntos desagrupados. E3 hace clic en el botón “Terminar” y aparece el letrero que pregunta si las respuestas coinciden, hace clic en el botón “Si” y aparece el letrero que la respuesta está muy bien y pueden continuar con la siguiente tarea. E3 afirma “*lo sabíamos*”.

#### **3.4.2.2.Tarea 2: 1 punto naranja, 3 puntos azules y 6 puntos verdes.**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E4 lee la tarea, al terminar afirma que la cantidad de puntos son más pocos (línea N°1). Decide anticipar y lo realiza de forma correcta, escribe en la casilla el número 136 en pocos segundos, dirige el cursor al botón “Terminar” para entrar a la etapa de verificación experimental. Hacemos la hipótesis que el estudiante al no pronunciar algún cálculo matemático y al contestar de forma rápida y correctamente, posiblemente plantea la estrategia de realizar la unión de los dígitos teniendo en cuenta la funcionalidad del sistema de valor posicional. Pero al no haber una evidencia contundente, es posible que el estudiante realice cálculos mentales para la solución de la tarea.

La pareja hace el proceso de desagrupación y llegan a dejar todos los puntos verdes desagrupados en la casilla verde, pero no realizan el conteo de verificación. E4 dirige el cursor al botón “Terminar” y E3 decide hacer clic en el botón “Si”. Se identifica una interiorización de la confianza de la estrategia.

#### **3.4.2.3.Tarea 3: 2 puntos naranjas, 6 puntos azules y 7 puntos verdes.**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E3 lee la tarea, decide anticipar, lo soluciona de forma rápida y correcta. Escribe en la casilla el número 267, dirige el cursor al botón “Terminar” para entrar a la etapa de verificación experimental.

La pareja hace el proceso de desagrupación y llegan a dejar todos los puntos verdes desagrupados en la casilla verde, pero no realizan el conteo de verificación. E3 dirige el cursor al botón “Terminar”, aparece el letrero que pregunta si las respuestas coinciden, hace clic en el botón “Si” y aparece el letrero que la respuesta está muy bien y pueden continuar con la siguiente tarea.

#### **3.4.2.4.Tarea 4: 1 punto naranja, 8 puntos azules y 3 puntos verdes.**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E3 lee la tarea, decide anticipar, lo realiza de forma rápida y correcta. Escribe en la casilla el número 183, dirige el cursor al botón “Terminar” para entrar a la etapa de verificación experimental.

La pareja hace el proceso de desagrupación y llegan a dejar todos los puntos verdes desagrupados en la casilla verde, pero no realizan el conteo de verificación. E4 dirige el cursor al botón “Terminar”, aparece el letrero que pregunta si las respuestas

coinciden, hace clic en el botón “Si” y aparece el letrero que la respuesta está muy bien y pueden continuar con la siguiente tarea

#### **3.4.2.5.Tarea 5: 3 puntos naranjas, 5 puntos azules y 0 puntos verdes.**

##### **Síntesis e interpretación de la interacción:**

E4 lee la tarea, decide anticipar y lo hace de forma correcta. Escribe en la casilla el número 350, dirige el cursor al botón “Terminar” para entrar a la etapa de verificación experimental.

La pareja hace el proceso de desagrupación y llegan a dejar todos los puntos verdes desagrupados en la casilla verde, pero no realizan el conteo de verificación. E3 dirige el cursor al botón “Terminar”, aparece el letrero que pregunta si las respuestas coinciden, hace clic en el botón “Si” y aparece el letrero que la respuesta está muy bien y pueden continuar con la siguiente tarea

##### **Análisis global de la interacción en la secuencia: Automatización de la gestión**

##### **didáctica:**

- *Incorporación y refuerzo de la estrategia:* En el proceso de solución de la primera tarea, desarrollada por anticipación, el estudiante E3 relaciona los puntos naranjas con las centenas. A su vez, suma la constitución de los puntos para dar un resultado y solucionar la tarea de forma correcta. Luego de la tarea 1 los estudiantes deciden anticipar en las demás tareas solucionándolas de forma rápida, correcta y sin pronunciamiento alguno. Por la falta de evidencia contundente, es posible que se presenten dos hipótesis de estrategias planteadas por los estudiantes. La primera es la estrategia de operaciones mentales como la

- multiplicación y adición para su solución. Y la segunda, es la estrategia de realizar la unión de los dígitos teniendo en cuenta la funcionalidad del sistema de valor posicional.
- *Interiorización de la confianza de la estrategia:* En la etapa de verificación experimental de la tarea uno, los estudiantes al visualizar la gran cantidad de puntos verdes desagrupados en la pantalla, decidieron no hacer el conteo. Optaron por depositar la confianza en la estrategia del funcionamiento del sistema de numeración posicional y terminar la tarea sin verificar el cardinal. Al seleccionar el botón “Si” que afirma que las respuestas coinciden, aparece el letrero que les indica que la solución está muy bien, por lo que E3 afirma “*lo sabíamos*”. Lo anterior permite interiorizar la confianza de la estrategia y son los primeros indicios para solucionar tareas con abandono del medio.
  - *Se evalúa la cantidad de tareas correctas, resueltas por medio de la anticipación.* El software, les permite avanzar al siguiente nivel y le indica mediante un letrero (retroacción didáctica) que la estrategia que ha utilizado funciona para resolver las tareas por lo que finalizan todas las tareas de manera satisfactoria.

## Capítulo 7

### Conclusiones

En el siguiente apartado, se presentan las conclusiones y recomendaciones a partir de los resultados identificados en el análisis a-posteriori del pilotaje, con los factores que conforman el cuerpo del trabajo. Factores como lo es el funcionamiento de la gestión didáctica automatizada, los efectos de las retroacciones didácticas que corresponden a la gestión, los indicios de aprendizaje por adaptación por parte de los estudiantes, el impacto en el aprendizaje haciendo uso del software, los efectos esperados por el diseño y la importancia de trabajar en diferentes bases de numeración.

#### - **Cómo funcionó la gestión didáctica automatizada**

En el pilotaje pudimos identificar en distintos escenarios el funcionamiento de la gestión didáctica automatizada. El primero está asociado a la repercusión que tuvieron las tareas de introducción, no solo en comprensión e interiorización de los invariantes asociados a los elementos de las tareas (varillas, puntos, casillas), sino también en el caso de la pareja A les permitió crear una estrategia para anticipar en las siguientes tareas.

Otro escenario se puede identificar en la interacción de los estudiantes con las tareas de exploración-anticipación. La pareja B inicia la interacción en la primera tarea y toma la decisión de anticipar. Introducen una cantidad errónea en las casillas de entrada. Sin embargo, tienen acceso a una etapa de verificación experimental que evalúa la respuesta y les proporciona una retroalimentación que les permite invalidar su estrategia de solución. Podemos observar el efecto de la evaluación en los estudiantes, puesto que

deciden resolver la siguiente tarea por medio de la exploración. Comprenden que sin una estrategia no pueden resolver las tareas de anticipación.

La etapa de exploración funciona como referente, que permite por un lado identificar la estructura constitutiva de los elementos. Se identifica una dificultad en el reconocimiento de los elementos que constituyen un punto de una unidad de orden superior (punto naranja y/o punto azul). Sin embargo, la exploración permite reconocer eficientemente las cantidades que constituyen dichos elementos para luego crear una estrategia y proporcionar una respuesta correcta.

Por último, podemos observar que la verificación experimental como proceso de evaluación automatizado permitió que los estudiantes construyeran, validaran y adaptaran adecuadamente una estrategia de anticipación.

- **Efecto de las retroacciones didácticas correspondientes a la gestión**

El proceso de interiorización de los invariantes en las tareas de introducción estuvo acompañado y reforzado por letreros emergentes que llamaban la atención del estudiante. Por ejemplo, cuando se intenta pasar una varilla sin llenar o un punto a la siguiente casilla sin agrupar, aparece el letrero que indica que esa acción no es posible. Las parejas interpretan el letrero y toman conciencia del proceso de resolución necesario para cumplir con la tarea.

Por otro lado, los letreros emergentes también funcionaban como un referente que el estudiante podía utilizar para identificar el momento en el que comienza o acaba un proceso de resolución, pero también cuando está incompleto. Este mecanismo permitió

que los estudiantes tomaran conciencia de la estructura de resolución que tenía cada una de las tareas.

Otro elemento escrito que aparece como herramienta fundamental de gestión fueron los enunciados. Permitió comunicar de manera clara y concisa la tarea, de manera que el estudiante comprendiera su desarrollo. Reconocen la diferencia entre los enunciados de agrupación y los enunciados de desagrupación en las tareas de exploración-anticipación. En cada caso los estudiantes identifican en la estructura, las variables que les permiten llegar a una posible solución, incluso antes de entrar en la etapa de resolución.

Uno de los elementos más importantes que contribuía con el proceso de gestión, fueron los botones. Estos tenían diferentes funciones a lo largo del proceso de resolución. Por ejemplo, los estudiantes se ven motivados a presionar el botón para dar inicio a la tarea, pero también lo utilizan como medio de comunicación para indicar que ya la habían terminado. También aparece durante la etapa de verificación como una herramienta que les permite evaluar (de manera interna) la solución que proporcionaban por anticipado, respecto a las acciones de agrupación/desagrupación concretas.

#### - **Los indicios de aprendizajes por adaptación**

Para hablar sobre los aprendizajes por adaptación, por un lado, haremos alusión a aquellos que se manifestaron en la fase de introducción, es decir, aquellos que hacen referencia a la comprensión sobre el funcionamiento del medio. Y, por otro lado, hacemos mención del impacto que tuvo el software en el aprendizaje fruto de la dialéctica explorar-anticipar en la creación y refuerzo de una estrategia de solución.

Las retroacciones matemáticas tales como la imantación de los puntos a las varillas, el bloqueo de la posición de los puntos y las varillas en una casilla, el rechazo de los puntos en una varilla llena, el cambio de apariencia de los elementos y la herramienta “x” de desagrupación contribuyeron junto con las retroacciones didácticas, como los letreros emergentes, a la interiorización del funcionamiento de los elementos en los procesos de agrupación y desagrupación, necesarios para resolver las siguientes tareas.

Los estudiantes abandonan y refuerzan acciones, por ejemplo, los estudiantes abandonan la acción de pasar un punto sin agrupar o una varilla incompleta a la siguiente casilla. A su vez, los estudiantes refuerzan la acción de agrupar en una varilla los puntos. Se dan cuenta que en una varilla no puede haber una cantidad de puntos que supere la base, gracias a la retroacción del rechazo, y que cuando la varilla está llena es posible pasarla a la siguiente casilla. Esta última acción se ve reforzada en la verificación experimental de las tareas de exploración-anticipación. Los estudiantes abandonan la acción de quitar un punto agrupado en una varilla a la fuerza, y reemplazan esta acción por el uso de la herramienta “x” para poder separar los puntos de la varilla.

Interpretamos los refuerzos y abandonos de la acción, como indicios claros de un aprendizaje por adaptación asociado al funcionamiento de las tareas, lo cual era el objetivo principal de las tareas de introducción.

Por otro lado, durante el desarrollo de las tareas de exploración-anticipación se identifica el impacto del uso del software en la creación, validación, refuerzo, abandono y adaptación de las estrategias utilizadas para resolver las tareas. En primer lugar, fue posible ver el funcionamiento de la dialéctica exploración-anticipación en la creación de

una estrategia. Los estudiantes deciden anticipar, y contestan erróneamente. El medio ofrece la posibilidad de evaluar el error y construir una estrategia de solución adecuada por medio de la verificación experimental. A su vez, identificamos un efecto de este proceso de verificación. Cuando un estudiante lee un enunciado y se da cuenta que no tiene una estrategia construida, se remite a la exploración como un espacio de experimentación que le permite construir una. La pareja A utiliza la estrategia del nivel uno para resolver tareas del nivel 2. Sin embargo, dada su interacción en la etapa de verificación, se dan cuenta que no funciona, por lo que en el nivel 2 deciden responder las primeras tareas por medio de la exploración. Corrigen la estrategia y la adaptan para resolver las tareas que involucran dos agrupaciones/desagrupaciones.

En el primer nivel de la tarea uno de agrupación, la pareja B se remite a la anticipación, implementan una estrategia incorrecta que invalidan en la verificación experimental. Lo que les permitió identificar el proceso de agrupación que está implícito en la tarea. Cuando los estudiantes identifican que no tienen una estrategia clara para la solución de la segunda tarea, deciden realizarla por medio de la exploración, refuerzan la estrategia en el proceso de agrupación. Al entrar a la tercera tarea, la pareja decide explorar, pero resuelven la tarea por anticipación e implementan una estrategia multiplicativa para la debida solución. En la cuarta tarea, deciden anticipar con una estrategia aditiva en relación con la constitución de elementos.

Por lo que concluimos que la dialéctica entre exploración y anticipación tuvo el efecto esperado en el aprendizaje por adaptación de los estudiantes, que les permitió resolver eficientemente las tareas.

- **La secuencia de actividades produjo los efectos que se habían esperado**

la secuencia de actividades diseñada tenía el objetivo de producir aprendizajes por adaptación relativos al valor posicional. Podemos observar que los estudiantes reconocen invariantes claves en un sistema posicional, por ejemplo, la base. Después de la interacción con las tareas de introducción, los estudiantes son conscientes de la existencia de un cardinal específico, que define la cantidad de puntos que pueden estar agrupados en una varilla. Evidencia de esto, se observa en las agrupaciones y desagrupaciones que realizan en la verificación experimental y en la transición de las tareas de base 4 a base 10. Ambas parejas resuelven las tareas teniendo en cuenta las agrupaciones de  $x$  puntos verdes por cada punto azul y  $x$  puntos azules por cada punto naranja.

Por otro lado, los procesos de agrupación y descomposición permitieron que los estudiantes reconocieran e interiorizaran la estructura constitutiva de los elementos. El hecho de construir una unidad de segundo orden (puntos azules) con base en unidades de primer orden (puntos verdes) implica realizar agrupaciones. A su vez, para construir una unidad de tercer orden (puntos naranjas) es necesario agrupar unidades de segundo orden (puntos azules) que a su vez están compuestos por unidades de primer orden.

Por último, el trabajo en base cuatro, funcionó como referente para resolver tareas de base diez conservando los invariantes en el proceso de agrupación/descomposición. Pudimos observar que los estudiantes identifican la relación existente entre la cantidad expresada en los enunciados de las tareas y la cantidad de grupos que se pueden formar de cada unidad (verdes, azules y naranjas). Comprenden que si la cantidad de puntos

verdes es 152, quiere decir que, la cantidad de puntos naranjas es 1, la cantidad de puntos azules corresponde a 5 y los puntos verdes sobrantes son 2. Es posible observar que hay conciencia sobre el significado del dígito de acuerdo a una posición en el número. En consecuencia, podemos confirmar la hipótesis propuesta por Arredondo y Zulay (2010) acerca del trabajo en diferentes bases como medio que fortalece el entendimiento de la estructura del sistema de representación numérica con valor posicional decimal.

- **Retroacciones inadecuadas y la necesidad de modificarlas.**

La figura en DGPad fue diseñada como un sistema de representación gráfico a partir de casillas que tienen de manera implícita el significado de valor posicional. En el desarrollo de las tareas de desagrupación en el segundo nivel, se presentaron una serie de inconvenientes asociados a las retroacciones matemáticas que impiden que una varilla naranja pueda pasar a la casilla verde. En efecto, el diseño impide el paso de la varilla naranja, sin embargo, permite que los puntos verdes que constituyen los puntos azules, que a su vez están agrupados en la varilla naranja, se puedan visualizar cuando esta se acerca a la casilla verde. Este hecho creó confusión en los estudiantes y desencadenó una serie de acciones fuera del contexto de descomposición de unidades. Es necesario impedir que las varillas naranjas se acerquen a la frontera entre las casillas azul y verde, para que no aparezcan los puntos verdes y los botones de desagrupación de las varillas azules cuando aún están atados a la varilla naranja.

Por otro lado, algunas instrucciones o letreros emergentes pueden mejorarse en pro de comunicar eficientemente lo que se quiere con las tareas, en especial las de introducción, de manera que lleven a reflexiones más conscientes sobre las acciones que llevan a cabo

los estudiantes en torno a la agrupación-desagrupación y su relación con el valor posicional. Por ejemplo, la pregunta 2 de las tareas de introducción agrupación nivel 2 dice “¿Por qué pudiste pasar todos los puntos azules y los verdes no?” no tuvo sentido puesto que la tarea presentó una cantidad de puntos verdes susceptibles de ser pasados en su totalidad a la casilla naranja por medio de las agrupaciones. La pregunta únicamente es pertinente cuando sobran puntos verdes, de otra manera, no es válida. Este escenario se presentó durante el pilotaje, y no se previó en el análisis a-priori, por lo que es preciso modificarla de manera que permita reflexionar coherentemente sobre las acciones que realiza el estudiante teniendo en cuenta los escenarios que pueden presentarse.

Por último, realizar algunas mejoras respecto a la disposición de las tareas de exploración-anticipación. Si bien cumplieron con el objetivo de que la dialéctica entre los dos caminos de resolución condujera a crear una estrategia explorando que luego les permitiera anticipar, podrían incorporarse algunas retroacciones didácticas que pudieran suscitar en los estudiantes reflexiones mucho más profundas sobre las estrategias que utilizan. Así como las retroacciones didácticas de los letreros al final de las tareas de introducción permiten reflexionar sobre las acciones que realizaron para resolver las tareas, también podría haber al final de cada secuencia un registro que muestre la cantidad de tareas respondidas correctamente y bajo qué método fueron resueltas. Se podrían hacer algunas preguntas al final de la secuencia sobre la posibilidad de redactar una estrategia utilizada para resolver las tareas.

- **Recomendaciones para la implementación de esta figura en una institución educativa.**

El pilotaje fue una evidencia clara de las ventajas que tiene utilizar bases diferentes para fortalecer los procedimientos subyacentes al uso del sistema de numeración decimal. Las metáforas del ábaco (varillas) y mini-computador de Papy (casillas) funcionaron como un medio adecuado que permite incorporar los principios del sistema de numeración decimal. En primer lugar, las varillas tienen implícita la estructura multiplicativa en el marco de la agrupación de unidades de primer orden para la creación de unidades de segundo y tercer orden. En segundo lugar, las casillas permiten visualizar los grupos como unidades de un nuevo orden cuando cambian la posición de los elementos (puntos y varillas) entre ellas. Este principio permite tomar conciencia del valor absoluto y relativo de las unidades (puntos) en cada una de las casillas.

Por otro lado, como pudimos observar, las intervenciones de parte del profesor fueron muy limitadas, los aprendizajes, las decisiones y la creación de estrategias surgieron de manera autónoma en las parejas de estudiantes. Fue posible crear un medio que gestionara de manera automática el proceso de evaluación sobre las acciones del estudiante. Observamos que la figura atiende a la necesidad de acompañar el proceso de aprendizaje de los estudiantes teniendo en cuentas variables como el tiempo y la cantidad de estudiantes por aula. El diseño permite que los estudiantes reciban una retroalimentación personalizada de acuerdo a las acciones y estrategias que ponen en obra en la interacción. Sin embargo, todos estos resultados se alcanzaron en condiciones de experimentación que no corresponden a las de una clase corriente. Sería importante realizar experimentaciones en condiciones reales de clase, para poder confirmar estos

resultados, así como analizar las ventajas y dificultades que esta secuencia diseñada aporta a la gestión del profesor.

Por último, queremos hacer algunas recomendaciones en caso de implementar el diseño.

- Propuesta sobre la gestión de los grupos: De acuerdo a las evidencias durante el pilotaje es posible reconocer la importancia de que los estudiantes trabajen en parejas para resolver las tareas. El trabajo en equipo permite que los estudiantes propongan estrategias, compartan opiniones y tomen decisiones a la hora de resolver una tarea. Formulan el conocimiento gracias a la discusión entre pares. Existen dos tipos de tareas en el diseño, las de introducción, que buscan familiarizar el estudiante con el medio de interacción previo a la propuesta de un problema. Y las tareas de exploración-anticipación, las cuales proponen una serie de tareas que el estudiante debe resolver mediante la creación de una estrategia. Es prudente garantizar que los estudiantes de manera individual puedan resolver las tareas de introducción. Puesto que en estas tareas afianzan conocimientos básicos sobre los elementos como las varillas, los puntos, las casillas, los letreros y los botones, que les permitirá desenvolverse eficientemente en las demás tareas. Ahora para las tareas de exploración-anticipación es importante que cada estudiante cuente con un compañero de manera que se puedan intercambiar estrategias, consultar posibles decisiones, resolver la tarea con base en el trabajo en equipo y la consolidación de una estrategia de solución.
- Es de vital importancia que cada pareja de estudiantes escriba cada una de las tareas, así como su solución. Se espera que los estudiantes en un espacio de

- formulación puedan describir detalladamente cuál fue la estrategia que crearon para resolver la tarea y cómo les permitió avanzar en la secuencia. Los registros escritos pueden ser en el cuaderno.
- Trabajar al menos dos bases diferentes a la base 10. Durante el pilotaje se llevó a cabo el trabajo en base 4 y base 10. Sin embargo, tenemos la hipótesis que la secuencia de tareas con otras bases diferentes posibilita que el estudiante reconozca invariantes importantes como la base, las normas de combinación, así como el valor relativo a la posición de los puntos en las casillas. También es posible que el estudiante encuentre relaciones de equivalencia entre cantidades al cambiar su base de numeración, es decir, poder identificar que 13 en base 10, es 111 en base 3.
  - Es importante que el docente tenga presente que sus intervenciones deben ser limitadas dentro de la resolución de la secuencia de actividades, puesto que el diseño tiene como objetivo fortalecer la autonomía del estudiante para crear estrategias, tomar decisiones, proponer soluciones con base en los conocimientos previos y las interacciones que se den con el medio. La tarea del docente se puede concentrar en la apertura de un espacio de formulación donde los estudiantes compartan entre sí las estrategias formuladas para resolver las tareas, así como hacer una intervención a modo de institucionalización al final de la resolución de las tareas.
  - El diseño tiene la posibilidad de trabajar diferentes bases de numeración. Esta característica permite que la implementación se pueda llevar a cabo en grados

inferiores como tercero o incluso segundo. Al realizar las adaptaciones pertinentes podría proponerse como actividad exploratoria sobre la estructura del sistema de numeración con valor posicional.

## Referencias

- Acosta, M. & Fiallo J. (2017) Enseñando geometría con tecnología digital: una propuesta desde la Teoría de Situaciones Didácticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Editorial Interinstitucional-CAIDE. Bogotá D.C.
- Arredondo, J. & Zulay, M.(2010) El Juego de la Casa de Cambio como una Estrategia Didáctica en la Construcción de un Sistema de Numeración Posicional. Colegio San José Comunidad de Hermanos Maristas. Armenia – Quindío.
- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V. México D.F.
- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y Métodos de la didáctica de la matemática. Facultad de Matemática. Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba.
- Castro, A. & Gorgorió, N. & Prat, M. (2015). Conocimiento Matemático Fundamental en el Grado de Educación Primaria: Sistema de Numeración Decimal y Valor Posicional.
- Cuevaz, J. (2021). Diseño de situaciones adidácticas para promover la conversión entre los registros de representación de la función de primer grado usando como medio el software de geometría Dinámica DGPad Colombia. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá. D.C.
- Duval R. (2001). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo. Cali: Universidad del Valle [M. Vega, Trad., notas originales en francés, Universidad del Valle, Colombia, 1999].

- Gutiérrez, L. (2017). Construyendo algunos fundamentos del concepto de número y el sistema de numeración decimal, en estudiantes de transición, a través de una propuesta de aula que involucra los conceptos de cardinal orden y agrupación.
- Kaput, J. (1987). Representation systems and mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19- 26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Fuson, K. C. (1998). Pedagogical, mathematical, and real-world conceptual-support nets: A model for building children's multidigit domain knowledge. *Mathematical Cognition*, 4(2), 147-186.
- Margolinas, C. (2009). La importancia de lo verdadero y de lo falso en la clase de matemáticas. (M. Acosta, & J. E. Fiallo, Trads.) Bucaramanga, Colombia: Universidad Industrial de Santander
- Medina, D. (2016). La comprensión del valor de posición en el desempeño matemático de niños. *Avances en Psicología Latinoamericana*, 34(3), 441-456, <https://doi.org/10.12804/apl34.3.2016.01>.
- Ortiz, Antonio & Marí, José & Gallardo, Jesús. (2012). Avances en el estudio de la comprensión del sistema de numeración decimal en estudiantes del grado de maestro de educación primaria.

- Rico, Luis. (2009). Sobre las Nociones de Representación y Comprensión en la Investigación en Educación Matemática. PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, ISSN 1887-3987, Vol. 4, N°. 1, 2009, pags. 1-14.
- Rojas, P. (2012) Sistemas de representación y aprendizaje de las matemáticas. Revista digital Matemática, Educación e Internet ([www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/](http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/)). Vol. 12, No 1. Agosto – Febrero 2012.
- Rueda, M. Niño, A. (2013). Automatización de actos de devolución en software Cabri LM. Trabajo de grado para optar por el título de Licenciado en Matemática. Universidad Industrial de Santander: Bucaramanga.
- Ruthven, K., Laborde, C., Leach, J., & Tiberghien, A. (2009). Design tools in didactical research: Instrumenting the epistemological and the cognitive aspects of the design of teaching sequences. *Educational Researcher*, 38, 329–342.
- Watson, A. Ohtani, M.(2015). Task Design In Mathematics Education. International Commission on Mathematical Instruction. ICIM Studies.